8/02 (56)

Γ-limatias

O RÓWNYCH SUMACH ÓSMYCH POTĘG

Najbardziej imponujące jest rozwiązanie, które odkrył w 2000 roku Scott I. Chase, a które zawiera **tylko osiem** ósmych potęg:

(8.3.5) $$\mathbf{966^8 + 539^8 + 81^8 = 954^8 + 725^8 + 481^8 + 310^8 + 158^8}.$$

A oto różnego typu rozwiązania używające dziewięciu ósmych potęg:

(8.2.7) $$1303^8 + 1127^8 = 1334^8 + 976^8 + 648^8 + 623^8 + 516^8 + 401^8 + 272^8$$

(8.1.8) $$1409^8 = 1324^8 + 1190^8 + 1088^8 + 748^8 + 524^8 + 478^8 + 223^8 + 90^8$$

(8.4.5) $$221^8 + 108^8 + 94^8 + 94^8 = 195^8 + 194^8 + 188^8 + 126^8 + 38^8.$$

Podajemy też próbkę równań spełnionych dla kilku wykładników:

$$313^n + 301^n + 188^n + 100^n + 99^n = 308^n + 307^n + 180^n + 131^n + 71^n \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, 8,$$

$$515^n + 452^n + 366^n + 189^n + 103^n = 508^n + 471^n + 331^n + 245^n + 18^n \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, 8,$$

$$36^n + 31^n + 30^n + 17^n + 7^n + 1^n = 35^n + 34^n + 27^n + 19^n + 4^n + 3^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 4, 6, 8,$$

$$501^n + 447^n + 443^n + 321^n + 283^n + 169^n + 159^n + 77^n = 491^n + 481^n + 399^n + 363^n + 237^n + 213^n + 137^n + 79^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8,$$

$$198^n + 174^n + 168^n + 115^n + 112^n + 65^n + 41^n + 17^n + 1^n = 197^n + 181^n + 157^n + 133^n + 86^n + 83^n + 30^n + 24^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

$$348^n + 322^n + 306^n + 224^n + 182^n + 111^n + 55^n + 13^n + 5^n = 343^n + 335^n + 293^n + 237^n + 166^n + 124^n + 42^n + 26^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (31)

Liczbą pierwszą Mersenne'a nazywamy każdą liczbę pierwszą postaci $2^p - 1$. Liczbami pierwszymi Mersenne'a są, na przykład, 31 i 127 (31. liczba pierwsza), dlatego też MNO 31 jest właśnie poświęcone liczbom Mersenne'a. Dotychczas znanych jest 38 liczb pierwszych Mersenne'a i do dziś nie wiadomo było, czy jest ich skończenie wiele. Do dziś, bo poniżej przedstawiamy twierdzenie, które tę kwestię ostatecznie rozstrzyga.

Twierdzenie. Wśród liczb Mersenne'a jest skończenie wiele liczb pierwszych.

Twierdzenie wynika w oczywisty sposób z następującego lematu.

Lemat 1. Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest skończony.

Lemat 1 jest prostą konsekwencją następującego faktu.

Lemat 2. Liczb naturalnych (całkowitych dodatnich) jest skończenie wiele.

Dowód. W zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych wyróżnijmy wszystkie te liczby, które można zdefiniować w jednej linijce. Nie będziemy wymieniać tu wszystkich reguł, które wolno stosować przy takim definiowaniu, określimy je w zarysie, rozumiejąc, że potrzebne szczegóły można sobie doprecyzować. Linijka składa się z maksimum 80 znaków (liter, spacji, powszechnie stosowanych symboli matematycznych – to też wymaga doprecyzowania, które symbole są dopuszczalne). Linijka tekstu definiuje liczbę, jeśli daje się ją jednoznacznie zinterpretować jako liczbę zapisaną za pomocą symboli matematycznych i tekstu w języku polskim i angielskim, z możliwymi odsyłaczami do istniejących w literaturze liczb lub definicji.

Tak więc poprawnymi definicjami w jednej linijce liczby 6 są np.:

sześć
six
$2 + 2 + 2$
$2 \cdot 3$
6
najmniejsza liczba doskonała
$(1 + 2)!$
liczba miesięcy w półroczu.

Nie są natomiast definicjami liczb napisy uchybiające zasadom ortografii, nawet jeśli większość ludzi domyśli się, o jaką liczbę chodzi:

szejset siedemnaście
dwa tysiące czysta dwadzieścia pińć
liczba podzbioruw zbioru czteroelementowego.

Niech $\mathbb{N}_1$ oznacza zbiór wszystkich liczb, które dadzą się zdefiniować w jednej linijce. Zbiór ten jest skończony, gdyż linijkę tekstu można skomponować na $s + s^2 + s^3 + \ldots + s^{80}$ sposobów, gdzie s jest liczbą znaków (liter i symboli), które zgodzimy się mieć do dyspozycji. Znakomita większość takich napisów to bełkot, który niczego nie definiuje. A wielokroć różne sensowne napisy definiują tę samą liczbę.

Niech teraz $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, które w jednej linijce tekstu zapisać się nie dadzą.

Jeżeli zbiór $\mathbb{N}_2$ jest niepusty, to istnieje w nim liczba najmniejsza, oznaczmy ją n. Czym jest wówczas liczba n? Otóż n to

najmniejsza liczba naturalna, której nie można zdefiniować w jednej linijce

Powyższy napis jednoznacznie definiuje liczbę n i składa się z 75 znaków, jest więc definicją liczby n w jednej linijce, skąd $n \in \mathbb{N}_1$ wbrew założeniu, że $n \in \mathbb{N}_2$. Błędne było więc przypuszczenie, że zbiór $\mathbb{N}_2$ jest niepusty.

Zatem $\mathbb{N}_2 = \emptyset$, skąd $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1$ i w konsekwencji zbiór wszystkich liczb naturalnych jest skończony, co kończy dowód lematu 2.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl