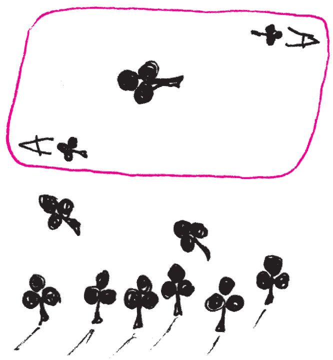
Doskonałe tasowanie kart

Tomasz BARTNICKI, Jarosław GRYTCZUK

Wstęp



Problemy związane z tasowaniem kart spędzały ludziom sen z powiek od dawien dawna. Interesowali się nimi jednak głównie zawodowi szulerzy i iluzjoniści. Dla tych pierwszych umiejętność odpowiedniego tasowania wiązała się z wymyślaniem nowych oszustw, dla drugich zaś była konieczną umiejętnością niezbędną do prezentacji różnych karcianych sztuczek. Dla przeciętnego człowieka grającego w karty tasowanie jest tylko koniecznym zabiegiem wykonywanym przed właściwą rozgrywką i samo w sobie nie jest godne zainteresowania. Potwierdza to definicja zaczerpnięta ze *Słownika języka polskiego* PWN:

tasować (z fr.) *ndk IV mieszając przekładać, zwłaszcza: mieszać talię kart przed rozdaniem.*

Nawet w *Międzynarodowym prawie brydżowym (III6A)* o tasowaniu czytamy tylko tyle:

Tasowanie – *przed rozpoczęciem gry każdą talię starannie się tasuje; przełożenie jej ma miejsce, gdy przeciwnik tasującego tego zażąda.*

Zadziwiające, że tak błaha czynność, jaką jest tasowanie, może interesować nie tylko iluzjonistów i szulerów, lecz także matematyków. Zaznaczmy jednak, iż wymienione profesje wcale nie muszą się wykluczać. Na przykład, matematyk amerykański, Persi Diaconis był swego czasu zawodowym magikiem i tasowanie kart od strony praktycznej miał opanowane do perfekcji. Nic więc dziwnego, że jest on obecnie najwybitniejszym specjalistą zajmującym się matematycznym ujęciem tej dziedziny.

Krótka historia kart do gry

Historia kart do gry sięga około ośmiu wieków wstecz. Karty swój rodowód, uchwytny dla badaczy, wywodzą z Dalekiego Wschodu. Zarówno wzmianki podróżników, jak i zachowane egzemplarze kart z XII wieku, wskazują, że są one wytworem kunsztu chińskich i koreańskich artystów. Przypuszcza się, że pomysł stworzenia kart został zaczerpnięty z gry w szachy. Karty były bowiem pierwotnie dwukolorowe i miały być odzwierciedleniem figur szachowych. Późniejszy podział na cztery kolory wiąże się z legendą, że karty miały symbolizować podział roku, a mianowicie: 4 kolory – 4 kwartały (4 pory roku), 12 figur – 12 miesięcy, 52 karty – 52 tygodnie. Dziś brak jest źródłowych danych potwierdzających lub zaprzeczających tym hipotezom. Nie wiadomo też, jakie reguły obowiązywały przy rozgrywkach wynalazców i tych, dla których ten rodzaj zabawy wynaleziono.

Wraz z wyprawami kupieckimi i podbojami zbrojnymi karty przenikają do Indii, a następnie do krajów Bliskiego Wschodu. W wiekach XIII–XIV, z krzyżowcami, karty przywędrowały do Europy, gdzie wreszcie znalazły podatny grunt do rozwoju i skąd rozpoczęły triumfalny podbój świata.

Pierwsza historyczna wzmianka o kartach w Polsce pochodzi z artykułu *De Ludorum abstinenta* z roku 1456 i co ciekawe, jest zwięzłym zakazem ich używania. Musiały więc być szeroko znane dużo wcześniej. Potwierdzały to coraz częściej wzmianki pamiętnikarzy, że znali karty możni i pospólstwo, a i na pierwszego króla karciarza nie musieliśmy długo czekać – był nim Zygmunt Stary.

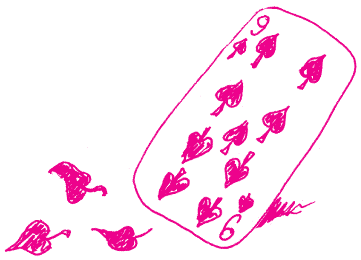
Z roku 1499 pochodzi pierwsza informacja o związku kart z matematyką. Jej autorem był franciszkanin Tomasz Murner, wędrowny bakałarz, który przemierzał Europę, jeżdżąc od uniwersytetu do uniwersytetu, gdzie wykładał i zdobywał wiedzę. Gdy dotarł do Paryża, trafił na wykład do Lefevre'a d'Etaplesa, który zauważył, że starszeństwo maści i figur karcianych łatwiej trafia do żaków niż formuły i wzory, i na talii kart uczył tajników matematyki. Pomysł ten tak spodobał się Murnerowi, że opracował system tłumaczenia praw logiki za pomocą kart i ruszył z powrotem do Krakowa, aby go wypróbować. Powodzenie jego wykładów przeszło najśmielsze oczekiwania, mówiono, że w miesiąc potrafił dać słuchaczom więcej wiedzy niż inni przez rok. Murner swoją metodę opisał w dziele *Chartiludium logices*, które, niestety, nie zachowało się do naszych czasów, ale znane było jeszcze po stuleciu od wydania.

Tymczasem Europę przełomu XVI–XVII wieku ogarnia już prawdziwe karciane szaleństwo, pojawiają się zawodowi szulerzy i kuglarze żyjący wyłącznie z karcianego rzemiosła. Nie pomagają surowe kary wymierzane oszustom ani kolejne zakazy wydawane przez władców. Karty stały się nieodłącznym atrybutem zjazdów szlacheckich, wypraw kupieckich i wojennych. A przykład szedł z góry, kolejni polscy królowie, Henryk Walezy i Zygmunt III Waza uznani byli za namiętnych hazardzistów.

Wiek XVII przyniósł nową jakość w historii kart. Zaczęły bowiem pojawiać się, oprócz gier czysto hazardowych, gry logiczne i kombinacyjne. Natomiast kształt graficzny kart poszedł w kierunku niezwiązanym z istotą gry. Od połowy XIX wieku w grach karcianych szala zaczęła się zdecydowanie przechylać na korzyść gier koncepcyjnych. Triumfy w Europie święcił *wist*, potem pojawił się *preferans*, a następnie *wint* – bezpośredni przodek dzisiejszego brydża. Ta ostatnia gra podbiła świat, trafiła do akademii i uniwersytetów, jej teorią zajmują się sławy naukowe, stała się sportem, pasją milionów i lukratywnym zawodem dla tysięcy.

Dziś, na początku XXI wieku, gdy wynaleziono tyle „złodziei czasu”, jak telewizja, komputery, motoryzacja, można by wysnuć wniosek, że karty straciły rację bytu. Jednakże obserwujemy zjawisko odwrotne, karty zyskują coraz większą popularność i to szczególnie wśród młodzieży. Na podstawie ich dotychczasowej historii wydaje się, że nasze wnuki również będą zasiadać do stołu, aby wziąć do ręki plik zadrukowanych kartoników i oddać się rozrywce pradziadków.

Tasowania doskonałe



Na początek zajmiemy się pewnym szczególnym rodzajem tasowania, zwanym umownie *doskonałym*. Dzielimy początkowo talię w połowie na dwie równe kupki, a następnie splatamy je, upuszczając pojedynczo spodnie karty, na przemian, raz z jednej, raz z drugiej kupki. Weźmy, na przykład, małą talię złożoną z dziesięciu kart jednego koloru, od asa do dziesiątki, ułożoną początkowo w kolejności

$$\spadesuit A, \spadesuit 2, \spadesuit 3, ..., \spadesuit 10,$$

(asa często traktujemy jako 1). W wyniku tasowania doskonałego możliwe są dwa układy:

$$1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10 \qquad \text{lub} \qquad 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5,$$

w zależności od tego, z której kupki pochodziła pierwsza upuszczona karta. Z powodu miejsca, w jakim znalazł się as, pierwsze tasowanie nazywamy *zewnętrznym*, a drugie *wewnętrznym*.

Na pozór wydaje się, że wielokrotne powtarzanie tej operacji skutecznie pomiesza karty w talii. Nic bardziej mylnego! Po wykonaniu pięciu następnych tasowań zewnętrznych nasza dziesięcioelementowa talia powróci do pierwotnej kolejności. Możemy więc uzyskać w ten sposób jedynie 6 różnych układów na $10! = 3\,628\,800$ wszystkich możliwych:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10$$

$$1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10$$

$$1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 10$$

$$1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 10$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10.$$

A jak będzie w przypadku prawdziwej talii składającej się z 52 kart? Jak wiele różnych układów możemy otrzymać, tasując sposobem zewnętrznym? Tym razem przeprowadzenie eksperymentu może być nieco kłopotliwe, ale od czego jest matematyka.

Oczywistym narzędziem do rozwiązania tego problemu są *permutacje*. Dla dowolnej liczby naturalnej n rozważmy więc talię składającą się z $2n$ kart, oznaczonych tym razem liczbami

$$0, 1, 2, ..., 2n - 1.$$

Tasowanie doskonałe zewnętrzne możemy zapisać również, nieco inaczej niż poprzednio, jako permutację p tych liczb, w której $p(i) = j$ oznacza, że karta z numerem i znajduje się na miejscu j. W tradycyjnym zapisie dwurzędowym

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & n+1 & \ldots & 2n-2 & 2n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \ldots & 2n-2 & 1 & 3 & \ldots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Nietrudno dostrzec prostą regułę określającą miejsce zajmowane przez i-tą kartę:

$$p(i) \equiv 2i \bmod (2n - 1).$$

W naszym poprzednim przykładzie mamy $n = 5$ oraz

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zatem, aby wyznaczyć liczbę tasowań, po których talia wróci do pierwotnej kolejności, a zarazem liczbę różnych możliwych układów, wystarczy znaleźć najmniejszą liczbę k, taką że k-krotne złożenie funkcji p będzie identycznością, co jest równoznaczne z warunkiem

$$2^k i \equiv i \bmod (2n-1)$$

dla $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Oczywiście wystarczy, aby powyższa kongruencja zachodziła dla $i = 1$, tak więc k jest najmniejszą liczbą spełniającą warunek

$$2^k \equiv 1 \bmod (2n-1).$$

Stosując ten wzór dla talii złożonej z 52 kart, dostajemy $k = 8$, co jest szokująco niską liczbą, tym bardziej że wszystkich permutacji jest teraz 52!.

Co się tyczy tasowania wewnętrznego $2n$ kart, to wystarczy zauważyć, że jest ono tym samym co tasowanie zewnętrzne $2n+2$ kart z dołączoną kartą pierwszą i ostatnią. Wobec tego prostego faktu liczba możliwych układów przy wielokrotnym tasowaniu wewnętrznym jest określona warunkiem

$$2^k \equiv 1 \bmod (2n+1).$$

Na przykład, dla 10 kart dostajemy $k = 10$, a w przypadku tradycyjnej talii otrzymujemy $k = 52$, co również nie jest zbyt imponujące.

Tak czy inaczej widać z tego jasno, że posiadanie umiejętności doskonałego tasowania pozwala na niemal całkowitą kontrolę nad rozkładem kart w talii. Dlatego strzeżmy się perfekcyjnie tasujących graczy! Podobno wspomniany już wcześniej ex-iluzjonista Persi Diaconis potrafi wykonać 8 doskonałych tasowań z rzędu!

$$52! = 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000.$$

Grupy tasowań binarnych

Grupa to zbiór X wraz z wyróżnionym elementem $e \in X$ oraz dodawaniem spełniającym warunki:

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ dla każdego $x, y, z \in X$,

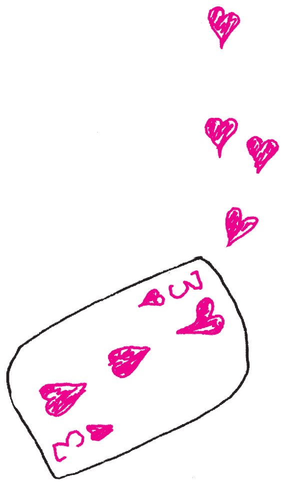
2) $x+e = e+x = x$ dla każdego $x \in X$,

3) dla każdego $x \in X$ istnieje element odwrotny x', taki, że $x + x' = x' + x = e$.

Skoro powtarzanie w kółko tego samego rodzaju tasowania, zewnętrznego czy wewnętrznego, nie jest zbyt owocne, to może wykonywanie ich na zmianę, w dowolnej kolejności, przyniesie większą liczbę różnych układów. A może nawet uzyskamy każdą permutację talii kart w wyniku ich odpowiedniej kombinacji?

W tym miejscu warto skorzystać z języka algebry, aby precyzyjniej sformułować problem. Przypomnijmy, że zbiór S_n wszystkich permutacji zbioru n elementowego tworzy *grupę* ze względu na składanie permutacji. Ponadto, każdy podzbiór $G \subseteq S_n$, który wraz z dowolnymi elementami p i q zawiera ich złożenie, jest *podgrupą* w S_n. Interesującym nas obiektem jest więc najmniejsza podgrupa grupy S_{2n}, zawierająca permutacje z i w, czyli tasowanie zewnętrzne i wewnętrzne. Podgrupę tę oznaczamy symbolem $G_{2,2n}$ i nazywamy *grupą tasowań doskonałych binarnych*. Używając jeszcze innych słów, $G_{2,2n}$ jest podgrupą grupy S_{2n} *generowaną* przez permutacje z i w.

Grupy $G_{2,2n}$ zostały doszczętnie zbadane już na początku lat 80. ubiegłego wieku. Znamy nie tylko rząd (liczbę elementów) każdej z tych grup, ale i dokładną strukturę. Wyczynu tego dokonało trio w składzie: Persi Diaconis, Ronald Graham i William Kantor. Z uwagi na zaawansowaną terminologię nie przedstawimy tu owej kompletnej klasyfikacji ze wszystkimi szczegółami. Przytoczymy jedynie kilka prostych faktów.



Kluczowym okazało się spostrzeżenie pewnej wspólnej własności wszystkich grup $G_{2,2n}$, zwanej *symetrią środkową*, którą wyjaśnimy na przykładzie. Weźmy 10 kart, tym razem w dwóch kolorach, po 5 w każdym kolorze i ułóżmy je w następujący sposób:

$$\spadesuit 1, \spadesuit 2, \spadesuit 3, \spadesuit 4, \spadesuit 5 \mid \heartsuit 5, \heartsuit 4, \heartsuit 3, \heartsuit 2, \heartsuit 1.$$

Zobaczmy, jaki będzie układ talii po jednokrotnym przetasowaniu:

$$z \;:\; \spadesuit 1, \heartsuit 5, \spadesuit 2, \heartsuit 4, \spadesuit 3 \mid \heartsuit 3, \spadesuit 4, \heartsuit 2, \spadesuit 5, \heartsuit 1$$

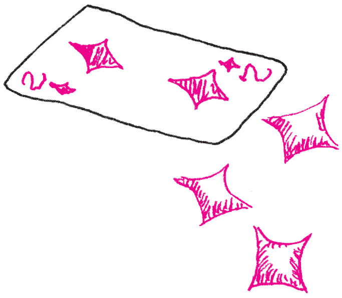
$$w \;:\; \heartsuit 5, \spadesuit 1, \heartsuit 4, \spadesuit 2, \heartsuit 3 \mid \spadesuit 3, \heartsuit 2, \spadesuit 4, \heartsuit 1, \spadesuit 5.$$

Widać, że dowolna para kart $\{\spadesuit i, \heartsuit i\}$ nadal jest położona symetrycznie względem środka talii. Wynika stąd, że elementami grupy $G_{2,2n}$ mogą być jedynie permutacje *środkowosymetryczne*, zachowujące symetryczne położenie względem środka każdej pary. Oznaczając grupę wszystkich permutacji środkowosymetrycznych przez B_n, możemy więc powiedzieć, że

$$G_{2,2n} \subseteq B_n \subset S_{2n}.$$

Rząd grupy skończonej to liczba elementów grupy.

Rząd grupy B_n można łatwo obliczyć, wynosi on $2^n n!$. Oczywiście, grupa $G_{2,2n}$ nie musi zawierać wszystkich permutacji środkowosymetrycznych, ale w żadnym razie jej rząd nie może przekroczyć liczby $2^n n!$.



Klasyfikacja grup $G_{2,2n}$, podana w pracy Diaconisa, Grahama i Kantora, wyróżnia 5 nieskończonych klas, w zależności od reszty z dzielenia przez 4 liczby n i tego, czy $2n$ jest potęgą liczby 2, oraz dwa przypadki patologiczne: $n = 6$ i $n = 12$. Tak się składa, że równość $G_{2,2n} = B_n$ ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 2 \pmod 4$ i $n \neq 6$, co obejmuje przypadek prawdziwej talii kart. Liczba wszystkich możliwych układów jest teraz ogromna, wynosi bowiem

$$2^{26} 26! = 27\,064\,431\,817\,106\,664\,380\,040\,216\,576\,000\,000.$$

Wciąż jednak stanowi znikomy, bo wynoszący zaledwie $3{,}3554 \times 10^{-34}$, ułamek wszystkich możliwych układów.

Tasowania potęgowe

Jak to zwykle bywa, cała historia wcale się na tym nie kończy. Można przecież pójść dalej i rozważać tasowania doskonałe z początkowym podziałem talii na dowolną liczbę k kupek, przy podobnym jak poprzednio założeniu o podzielności liczby wszystkich kart przez k. Tasowanie przebiega podobnie jak poprzednio, najpierw ustalamy kolejność kupek, a potem upuszczamy w tej kolejności po jednej karcie z każdej kupki. Oto przebieg jednego z sześciu możliwych tasowań doskonałych 12 kart, przy $k = 3$.

1. Podział na 3 kupki:

♣2	♥2	♠2
♣3	♥3	♠3
♣4	♥4	♠4
♣5	♥5	♠5 .

2. Permutacja kupek:

♥2	♠2	♣2
♥3	♠3	♣3
♥4	♠4	♣4
♥5	♠5	♣5 .

3. Tasowanie:

♥2
♠2
♣2
♥3
♠3
♣3
♥4
♠4
♣4
♥5
♠5
♣5 .

Nawet dla $k = 3$ praktyczne wykonanie tej czynności jest raczej trudne, z uwagi na brak trzeciej ręki, ale przecież dla uzyskania potasowanej talii równie dobrze można ściągać karty z kupek w kolejności odwrotnej do kolejności upuszczania. Możliwych jest zatem $k!$ różnych tasowań doskonałych, które mogą być wielokrotnie ze sobą przeplatane. W ten sposób otrzymamy, dla każdego $k \geqslant 3$, całą plejadę nowych grup $G_{k,kn}$, z których każda jest generowana przez $k!$ permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, kn\}$.

Szczególnie interesująca jest sytuacja, gdy liczba kart w talii jest potęgą liczby kupek. Na początek przypomnijmy znaną karcianą sztuczkę, polegającą na odgadywaniu pomyślanej karty. Prosimy widza, aby z talii złożonej z 27 kart wybrał i zapamiętał jedną. Rozkładamy następnie karty w trzech kolumnach i pytamy, w której z nich znajduje się pomyślana karta. Składamy karty, tak aby kolumna ta znalazła się w środku i ponawiamy całą operację. Po trzecim złożeniu kart nie patrząc w talię, wyciągamy z niej jedną kartę i pokazujemy ją zdumionemu widzowi, który, nie mogąc wyjść z podziwu, stwierdza, że właśnie tę kartę wybrał na początku.

Sztuczka ta jest znana od dawna, a już w roku 1813 M. Gergonne podał jej matematyczny opis i to w uogólnionym przypadku, gdy talia złożona jest z m^m kart. Sekret tej sztuczki opiera się na ciekawych własnościach grupy tasowań G_{k,k^m}. Proponujemy Czytelnikowi wykonanie eksperymentu na talii 27 kart, złożonej z trzech kolorów od asa do dziewiątki. Umożliwi to rozpoznanie struktury grupy $G_{3,27}$ i ewentualne odkrycie ogólnej prawidłowości.

Grupami G_{k,k^m} zajął się po raz pierwszy student politechniki w Kalifornii, Steve Medvedoff w swojej pracy magisterskiej. Jego głównym rezultatem było wyliczenie rzędu tej grupy, a wynosi on $m(k!)^m$. Gdy jednak przedstawił swoją pracę promotorowi, Kentowi Morrisonowi, obaj postanowili zająć się tym problemem dogłębniej i dokładnie zbadać strukturę tych grup. Ustalili oni, że grupa G_{k,k^m} jest *iloczynem półprostym* grupy $S_k \times S_k \times \ldots \times S_k$ (m czynników) przez grupę cykliczną $\mathbb{Z}_m$, co w zwartym zapisie ma postać:

$$G_{k,k^m} = (S_k)^m \bowtie \mathbb{Z}_m.$$

W tym miejscu przepraszamy Czytelników za tę odrobinę przerażającego formalizmu, ale nie zawsze uda się w „ludzkim” języku wyrazić wszystkie subtelności matematycznej struktury. Niemniej jednak możemy wyobrażać sobie elementy grupy G_{k,k^m} jako m-wyrazowe ciągi permutacji z grupy S_k pokolorowane liczbami $0, 1, \ldots, m-1$. Działanie zaś polega, z grubsza, na składaniu permutacji znajdujących się na tych samych współrzędnych (po wcześniejszym cyklicznym przesunięciu współrzędnych drugiego ciągu, odpowiadającym pokolorowaniu), wraz z jednoczesną zmianą kolorów według reguły modulo m. Na przykład, jeżeli $a = (p_1, p_2, p_3; 1)$ i $b = (q_1, q_2, q_3; 2)$ są elementami grupy $G_{3,27}$, to

$$a \circ b = (p_1 \circ q_2, p_2 \circ q_3, p_3 \circ q_1; 0),$$

ponieważ $1 + 2 = 0$ modulo 3, a współrzędne ciągu b zostały, ze względu na jego kolor, przesunięte cyklicznie o 2.

Pomimo sukcesu w rozpoznaniu struktury grup tasowań potęgowych o ogólnym przypadku grup $G_{k,kn}$ niewiele wiadomo. Nawet dla $k = 3$ istnieje jedynie hipoteza, wedle której możliwe są tylko trzy następujące sytuacje.

Hipoteza. *Klasyfikacja grup $G_{3,3n}$ obejmuje trzy następujące klasy:*

(1) $G_{3,3n} = A_{3n}$, jeśli n jest wielokrotnością 4 (A_{3n} oznacza podgrupę permutacji parzystych, której rząd jest równy połowie liczby wszystkich permutacji).

(2) $G_{3,3n} = S_{3n}$, jeśli n nie jest wielokrotnością 4 ani potęgą 3.

(3) $G_{3,3n} = (S_3)^m \bowtie \mathbb{Z}_3$, gdy $n = 3^m$ (to zostało udowodnione).

Hipoteza ta była oczywiście weryfikowana za pomocą komputera, ale jak dotąd nie natrafiono na żaden kontrprzykład. Można, na przykład, sprawdzić, że w grupie $G_{3,21}$ wystąpią wszystkie możliwe permutacje 21 kart. Wreszcie, można puścić wodze fantazji i postawić szereg podobnych hipotez dla kolejnych wartości k. Szczególnie interesująca wydaje się jednak kwestia, dla jakich n, przy ustalonym k, grupa $G_{k,kn}$ jest pełną grupą permutacji S_{kn}.

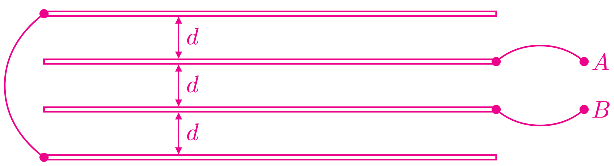
W tym miejscu przerwiemy naszą dyskusję o tasowaniach doskonałych, która niepostrzeżenie oderwała się od realnego świata, w którym talie o większej niż 52 liczbie kart nie istnieją i pewnie nigdy nie będą istniały.

Zadania

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delty!
Rozwiąż wrześniowe (tak, wrześniowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.
Więcej informacji: http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 577. Mamy cztery jednakowe cienkie płyty przewodzące, położone tak jak na rysunku 1. Pole powierzchni każdej płyty wynosi S, a odległość między dwiema sąsiednimi jest równa d. Skrajne powierzchnie zostały połączone przewodnikiem. Znaleźć pojemność układu środkowych dwóch płyt.
Rozwiązanie na str. 1



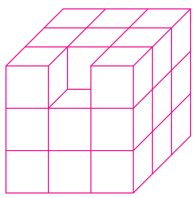
Rys. 1

F 578. Do dużej metalowej powierzchni zbliżono równolegle dwa małe płaskie kawałki metalu o polach powierzchni S_1 i S_2, znajdujące się w odległości odpowiednio d_1 i d_2 od płaszczyzny przewodzącej. Jaka jest pojemność powstałego w ten sposób kondensatora, którego końcówki znajdują się w dwóch dowolnych punktach powierzchni lub płytek? Płytki znajdują się wzajemnie odpowiednio daleko, a ich odległości od metalowej powierzchni d_1 i d_2 są dużo mniejsze od ich rozmiarów.
Rozwiązanie na str. 1

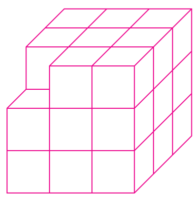
Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 997. Na każdym polu tablicy 5×7 stoi pionek. Czy możliwe jest takie ponowne ustawienie pionków, by każdy z nich zajmował pole sąsiadujące z zajmowanym pierwotnie? Pola nazywamy sąsiadującymi, jeśli mają dokładnie jeden bok wspólny.
Rozwiązanie na str. 4

M 998. Z kostki Rubika wypadł klocek na środku krawędzi (rys. 2). Klocek dawał się włożyć ponownie, ale tylko odwrotną stroną. Czy taką kostkę Rubika da się ułożyć?
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2



Rys. 3

M 999. Klocek na środku krawędzi udało się w końcu włożyć właściwą stroną, ale przy okazji wypadł klocek narożnikowy (rys. 3). Niestety nie pamiętamy, jak był on położony. Jak na podstawie położenia pozostałych klocków rozstrzygnąć, którą stroną należy go włożyć ?
Rozwiązanie na str. 3