Trójkąty o bokach i środkowych całkowitej długości

Lev KOURLIANDTCHIK, Boris LURJE

Lev Kourliandtchik pracuje na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, a Boris Lurje – w Instytucie Matematyki w Sankt-Petersburgu.

Np. trójkąt o dwóch bokach 24375 i trzecim 13650 ma także wysokości i dwusieczne całkowitej długości. Można to samemu sprawdzić lub zajrzeć do wspomnianego w tekście artykułu.

Istnieją trójkąty, które mają zarówno boki, jak wysokości i dwusieczne kątów całkowitej długości (pisaliśmy o tym w *Delcie* 6/2002: *O pewnym problemie Eulera*). Okazuje się jednak, że zbudowanie trójkąta, w którym również środkowe miałyby całkowitą długość, nikomu się – jak dotąd – nie udało.

Trójkąty o całkowitych długościach boków i środkowych istnieją. Cały szereg przykładów podał Jarosław Wróblewski. Oto trzy z nich:

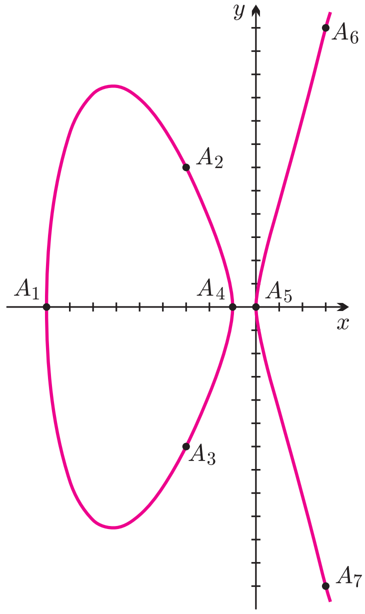
boki	136	170	174	i środkowe	127	131	158,
	254	262	316		204	255	261,
	226	486	580		244	367	523.

Ale już wymagania, aby długości boków, środkowych i wysokości były całkowite, nie udało się dotąd zrealizować. Nie wiadomo też, czy w ogóle zadanie takie jest wykonalne.

Tutaj pokażemy, jak można, posługując się pewnymi krzywymi, wykazać, że nie ma takich trójkątów wśród trójkątów równoramiennych ani prostokątnych.

Okazuje się, że informacja wystarczająca do stwierdzenia, iż nie ma trójkąta równoramiennego o bokach i środkowych całkowitej długości, to fakt, że

na krzywej $y^2 = x(x+1)(x+9)$ *jest dokładnie siedem punktów o współrzędnych wymiernych.*



Rys. 1

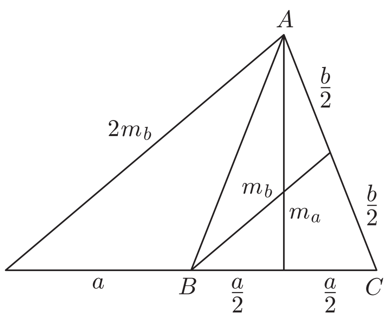
O tym, że siedem punktów o współrzędnych wymiernych można na tej krzywej znaleźć, każdy z Czytelników może się łatwo przekonać sprawdzając, iż leżą na niej punkty (rys. 1):

$$A_1 = (-9,\ 0),\quad A_2 = (-3,\ 6),\quad A_3 = (-3,\ -6),\quad A_4 = (-1,\ 0),$$
$$A_5 = (0,\ 0),\quad A_6 = (3,\ 12),\quad A_7 = (3,\ -12),$$

których współrzędne są nawet całkowite.

Cała sztuka to stwierdzenie, że innych punktów o obu współrzędnych wymiernych na tej krzywej nie ma. Do tej sprawy powrócimy w jednym z następnych numerów *Delty* i udowodnimy to stwierdzenie – w tym artykule przyjmiemy ten fakt bez dowodu.

Sprawdźmy jednak, że skoro tak jest, to trójkąt równoramienny o bokach i środkowych całkowitej długości nie istnieje.



Rys. 2

Przypuśćmy przeciwnie, że ABC (rys. 2) jest takim trójkątem. Przedłużamy jego podstawę dwukrotnie. Bez trudu stwierdzamy, iż

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 = b^2, \quad \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + m_a^2 = 4m_b^2.$$

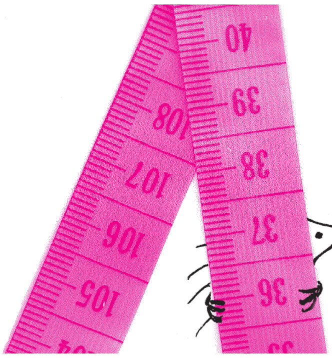
Niech teraz

$$x = \frac{4m_a^2}{a^2}, \quad y = \frac{16 m_a m_b b}{a^3}.$$

Wtedy

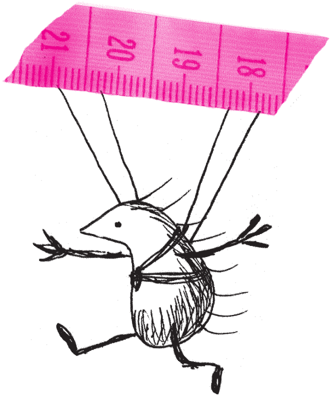
$$y^2 = \frac{4m_a^2}{a^2} \cdot \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{16m_b^2}{a^2} = x(x+1)(x+9).$$

Ponieważ liczby a, b, m_a, m_b są całkowite, więc liczby x i y są wymierne, przy czym x jest kwadratem liczby wymiernej. Lecz na krzywej wiążącej te wielkości jest tylko siedem punktów o współrzędnych wymiernych, a wśród nich tylko jedna pierwsza współrzędna jest kwadratem. Wtedy jedna ze środkowych jest równa zeru. Zatem trójkąt równoramienny, mający zarówno boki, jak i środkowe długości całkowitej, nie istnieje.



Tak więc znajomość punktów o współrzędnych wymiernych na rozpatrywanej krzywej rozwiązuje problem istnienia żądanego trójkąta.

Trójkąt pitagorejski to trójkąt prostokątny o całkowitych długościach boków.



W podobny sposób można się przekonać, że nie istnieje trójkąt pitagorejski o choćby jednej środkowej wychodzącej z kąta ostrego o długości całkowitej.

Przypuśćmy, że mamy taki trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $2a$ i $2b$ oraz przeciwprostokątnej $2c$, w którym także środkowa, poprowadzona do boku o długości $2a$, ma całkowitą długość m_a.

Mamy więc

$$a^2+b^2=c^2, \quad a^2+4b^2=m_a^2.$$

Niech

$$x=\frac{a^2}{b^2}, \quad y=\frac{acm_a}{b^3}.$$

Wtedy

$$y^2=\left(\frac{acm_a}{b^3}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{b^2}\cdot\frac{a^2+4b^2}{b^2}=x(x+1)(x+4).$$

Problem został sprowadzony do poszukiwania punktów wymiernych na krzywej

$$y^2=x(x+1)(x+4),$$

których odcięte są kwadratami liczb wymiernych. Ale

na krzywej $y^2=x(x+1)(x+4)$ jest dokładnie siedem punktów o współrzędnych wymiernych,

a są nimi

$$(-4,0),\quad (-2,2),\quad (-2,-2)\quad (-1,0),\quad (0,0),\quad (2,6),\quad (2,-6),$$

skąd (jak poprzednio) wynika, że żądany trójkąt nie istnieje.

Pozostaje wobec tego kwestia dowodu, że faktycznie na obu użytych krzywych jest dokładnie siedem punktów o obu współrzędnych wymiernych. Krzywe te należą do klasy krzywych eliptycznych. O takich krzywych napiszemy w jednym z najbliższych numerów *Delty*, zamieszczając przy okazji dowód obu zastosowanych w tym artykule stwierdzeń.

⋆ ⋆ ⋆

Kuć i orać w dzień zawzięcie,
bo plonów niema bez trudu
złocisty szczęścia okręcie
kołyszesz...
Kuć. My nie czekamy cudu
robota to potęga ludu.

(*Nie ma* wówczas pisano razem.)

Jest to wiersz K. Cwojdzińskiego. I choć nie wzrusza swym subtelnym pięknem, znany jest jako mnemotechniczny sposób zapamiętania cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π. Otóż liczby liter w kolejnych słowach układają się w rozwinięcie

$$\pi=3{,}1415926535897932384626 4\ldots$$

Może ktoś z Was, Drodzy Czytelnicy, ułoży wiersz pozwalający na zapamiętanie rozwinięć dziesiętnych innych liczb, takich jak $\sqrt{2}$, e...?

Można też tak:

Zbrodnia to niesłychana, ... $= 8{,}211\ldots$

Czy ten lub jakikolwiek inny wiersz (oczywiście po dopisaniu dalszych kilkunastu słów) odpowiada rozwinięciu dziesiętnemu jakiejś w miarę prostej liczby, czegoś w rodzaju

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\ln 2}+e?$$

Piotr HAJŁASZ

Czekamy na propozycje, najciekawsze wydrukujemy.

Redakcja

Rozwiązanie zadania M 996.
Niech

$$\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3},$$
$$\lambda_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3},$$
$$\lambda_3=1+\sqrt{2}-\sqrt{3},$$
$$\lambda_4=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Wówczas λ_m^n, $m=1,2,3,4$, jest sumą wyrażeń postaci

$$1^i(\pm\sqrt{2})^j(\pm\sqrt{3})^k,\ i+j+k=n.$$

Zatem

(1a) $\lambda_1^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$,

(2a) $\lambda_2^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}$,

(3a) $\lambda_3^n=q_n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}$,

(4a) $\lambda_4^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$.

Sumując (1a) – (4a) otrzymamy

$$q_n=\frac{\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n}{4}.$$

Dzielimy teraz każdą z równości (1a)–(4a) przez q_n i przechodzimy do granicy. Ponieważ λ_1 jest największą co do modułu spośród liczb $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, więc otrzymamy

(1b) $4=1+\lim\limits_{n\to\infty}(r_n'\sqrt{2}+s_n'\sqrt{3}+t_n'\sqrt{6})$,

(2b) $0=1+\lim\limits_{n\to\infty}(-r_n'\sqrt{2}+s_n'\sqrt{3}-t_n'\sqrt{6})$,

(3b) $0=1+\lim\limits_{n\to\infty}(r_n'\sqrt{2}-s_n'\sqrt{3}-t_n'\sqrt{6})$.

gdzie

$$r_n'=\frac{r_n}{q_n},\quad s_n'=\frac{s_n}{q_n},\quad t_n'=\frac{t_n}{q_n}.$$

Stąd już łatwo (dodając stronami (1b) i (2b)) otrzymujemy, że $s_n'\to\frac{1}{\sqrt{3}}$. Podobnie $r_n'\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $t_n'\to\frac{1}{\sqrt{6}}$.