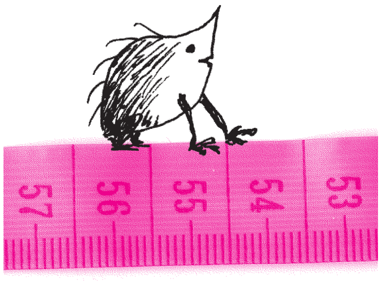
O mierzeniu linijką

Marek W. GUTOWSKI



Pomiar – co to takiego?

Pomiar to porównanie wielkości mierzonej ze wzorcem. Tyle zazwyczaj dowiadujemy się w szkole. Żeby niepotrzebnie nie komplikować, zajmijmy się tzw. pomiarami bezpośrednimi, a konkretnie mierzeniem długości.

Mając do dyspozycji odcinek o długości jednostkowej, możemy za jego pomocą wyznaczać długości innych odcinków, to znaczy wyrażać ich długość jako pewną liczbę. Rasowy fizyk wtrąci w tym miejscu, że wynik naszego pomiaru jest liczbą mianowaną. Oznacza to, że wynik składa się z dwóch części: liczby i nazwy jednostki (ewentualnie jej wielokrotności), np. 6 m = 600 cm = 0,006 km.

Już starożytni Grecy... mieli kłopot

Skonstruować odcinek o z góry zadanej długości jest stosunkowo łatwo, zwłaszcza jeśli ta długość ma się wyrażać liczbą całkowitą. Poradzimy sobie także z konstrukcją odcinków o długości wyrażonej ułamkiem o postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że umiemy skonstruować sobie linijkę do pomiarów długości. Jednak mierzenie nie jest zadaniem konstrukcyjnym z geometrii. Już starożytni Grecy, a konkretnie matematycy ze szkoły Pitagorasa odkryli, że istnieją odcinki niewspółmierne z odcinkiem jednostkowym (np. przekątna kwadratu jednostkowego), których – nawet w teorii – nie da się dokładnie zmierzyć.

Jak matematyk wyobraża sobie proces pomiaru długości? Trzeba najpierw ustawić odcinek jednostkowy tak, by jeden z jego końców pokrył się z końcem odcinka mierzonego. Przypuśćmy, że odcinek mierzony jest dłuższy (przypadek przeciwny nie wymaga oddzielnego omawiania). Wobec tego odkładamy na odcinku mierzonym ponownie odcinek jednostkowy, tak aby miał dokładnie jeden punkt wspólny ze swoim „poprzednim wcieleniem”. Postępujemy tak dotąd, aż kolejna próba okaże się nieudana w tym sensie, że kolejna kopia odcinka jednostkowego nie będzie w całości zawierać się w odcinku mierzonym, a mówiąc zwyczajnie – będzie wystawać. Jeśli k kopii odcinka jednostkowego mieści się w odcinku mierzonym, a $k+1$ nie, to powiemy, że odcinek mierzony ma długość będącą liczbą z przedziału $[k, k+1)$. (Pomińmy przypadek, kiedy odcinek mierzony ma długość wyrażoną całkowitą wielokrotnością długości odcinka jednostkowego.) Jeśli tak osiągnięty wynik nas nie zadowala, bo jest niedokładny (albo tylko za mało dokładny), to możemy pozostający odcinek wymierzyć za pomocą odcinka, np. o długości $\frac{1}{10}$ jednostki, gdyż umiemy go przecież skonstruować (użyjemy np. twierdzenia Talesa). Uzyskamy tym sposobem lepsze oszacowanie wyniku albo i końcowy wynik. Biorąc, w razie potrzeby, jako „miarkę” odcinki o długości kolejno $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$ jednostki będziemy otrzymywać przedziały o coraz mniejszej szerokości, z których każdy zawiera liczbę będącą długością odcinka mierzonego. Dla matematyka sprawa jest jasna: albo proces ten się zakończy (wtedy szukana długość da się zapisać jako ułamek dziesiętny o skończonej długości), albo nie. Jeśli się nie zakończy, to jako wynik matematyk przyjmie wspólną granicę dwóch ciągów tworzonych podczas procedury pomiaru.

A jak widzi ten proces fizyk? Z jednej strony jest miło, że każdy kolejny etap pomiaru dostarcza pewnej, czy jak kto woli gwarantowanej, kolejnej cyfry dziesiętnej wyniku. Ale:

- fizyk nie dysponuje nieskończonym czasem na wykonanie pomiaru, a ponadto
- nie może sobie dowolnie zmniejszać (np. dzieląc za każdym razem na dziesięć równych części) swojego przyrządu pomiarowego.

Fizyk chciałby jeszcze, aby cała procedura mogła być zautomatyzowana, to znaczy, aby mogła być wykonywana przez odpowiednio skonstruowany przyrząd pomiarowy, bez świadomego udziału eksperymentatora. Chodzi o to, aby

Rozwiązanie zadania M 994.
Określamy ciągi $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ za pomocą równości
$$x_n + y_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n.$$
Porównując rozwinięcie $(1+\sqrt{2})^n$ oraz $(1-\sqrt{2})^n$ łatwo spostrzec, że
$$x_n - y_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n,$$
skąd
$$x_n^2 - 2y_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{2})(x_n - y_n\sqrt{2}) = = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n.$$
Wystarczy teraz wziąć $m = x_n^2$ dla n parzystego i $m = x_n^2 + 1$ dla n nieparzystego. Dla przykładu, gdy n jest parzyste, to
$$\sqrt{m} + \sqrt{m-1} = x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} = = x_n + \sqrt{2y_n^2} = (1+\sqrt{2})^n.$$

Rozwiązanie zadania M 995.
Niech
$$b = 7 + 5\sqrt{2},\ c = 7 - 5\sqrt{2},\ a = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$
Mamy
$$a^3 = b + c + 3\sqrt[3]{bc}(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) = 14 - 3a.$$
Wystarczy zauważyć, że jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu
$$x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2 + 2x + 7)$$
jest 2. Zatem $a = 2$.

otrzymany wynik był obiektywny, czyli rzetelny, bez żadnego „naciągania”, do którego mogłaby mieć skłonność osoba wykonująca pomiar. Krótko mówiąc: rezultat pomiaru długości ustalonego odcinka powinien być zawsze taki sam, niezależnie od tego, kto wykonał pomiar.

Wielkość $\frac{\Delta l}{L} \times 100\%$, którą nazwalibyśmy *względną niepewnością pomiaru*, (dawniej: *błędem względnym*) jest niedostępna, gdyż nie znamy prawdziwej wartości L i możemy sensownie posługiwać się wyłącznie wielkością zmierzoną $\hat{L}$. Jest jasne, że są to dwie różne liczby, bo $L \neq \hat{L}$. Z tego powodu *niepewność względna* ma sens jedynie jako orientacyjna ocena jakości pomiaru i nie powinna być używana jako miara ilościowa niepewności pomiarowej.

Błąd czy niepewność?

Przypuśćmy, że wykonaliśmy pomiar długości odcinka, tak jak mógł to zrobić fizyk, tj. przerywając procedurę po skończonej liczbie kroków. Jako wynik otrzymaliśmy przedział $[l_1, l_2]$, gdzie oczywiście $l_1 \neq l_2$. Co to oznacza? Wciąż nie wiemy, ile rzeczywiście wynosi długość badanego odcinka L, ale wiemy, że z całą pewnością mieści się ona w podanym przedziale.

Jak można zapisać otrzymany rezultat? Matematyk zrobi to pewnie tak:

$$L \in [l_1, l_2] \quad \text{albo} \quad l_1 \leqslant L \leqslant l_2,$$

natomiast fizyk albo inżynier woli zapis typu

$$L = \hat{L} \pm \Delta l,$$

gdzie $\hat{L} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ oraz $\Delta l = \frac{1}{2}|l_2 - l_1|$. Nietrudno się przekonać, że zachodzi związek

$$|L - \hat{L}| \leqslant \Delta l.$$

Szczerze mówiąc, umyślnie zdefiniowaliśmy wielkości $\hat{L}$ oraz Δl w taki sposób, aby ten związek zachodził. Wielkość $\hat{L} - L$, będącą różnicą między wartością zmierzoną ($\hat{L}$) a nieznaną, prawdziwą długością odcinka (L), przyjęło się nazywać w literaturze matematycznej błędem. Widzimy, że możemy mieć do czynienia z błędami dodatnimi lub ujemnymi, zależnie od tego, czy wynik pomiaru, $\hat{L}$, będzie z nadmiarem czy niedomiarem, innymi słowy większy czy mniejszy od wartości prawdziwej L. Nie ma przy tym raz na zawsze ustalonej konwencji, czy błędem nazywamy wielkość $\hat{L} - L$ czy też $L - \hat{L}$; w jednych tekstach spotyka się jeden zapis, w innych – drugi.

Do niedawna fizyk także nazywał tę wielkość błędem, wielkość $|\hat{L} - L|$ zaś błędem bezwzględnym. Jest jednak istotna różnica między tym, jak ten problem widzi fizyk i matematyk. Matematyk – w zasadzie – mógłby obliczyć, ile właściwie wynosi błąd, a więc i błąd bezwzględny. Mógłby, choć zwykle tego nie robi, zadowalając się oszacowaniem błędu lub jego wartości bezwzględnej. Fizyk nie ma wyboru: nie ma żadnych innych informacji na temat wielkości mierzonej, oprócz tych, które uzyskał poprzez wykonanie pomiaru. Może on więc jedynie szacować błąd. Samo słowo błąd wywołuje niewłaściwe skojarzenia i wobec tego, zamiast niego powinniśmy używać określenia **niepewność pomiarowa**, zaleconego w roku 1995 przez 7 międzynarodowych organizacji, w tym, m.in. ISO (*International Organization for Standardization*) oraz IUPAP (*International Union of Pure and Applied Physics*). Więcej na ten temat można przeczytać w pracy przytoczonej na końcu.

Pomiar długości fragmentu dowolnej krzywej, która nie jest odcinkiem, jest znacznie trudniejszym zagadnieniem. Wcale nie jest oczywiste, czy stosując przytoczoną metodę, otrzymamy w każdym kroku przedział liczbowy, który na pewno zawiera liczbę poszukiwaną. Jak bowiem znaleźć łamaną, która aproksymuje krzywą i która z pewnością jest już „za długa”? Problem jest niebłahy i z pewnością wykracza poza zakres abecadła fizyki, tym bardziej że matematycy wymyślili krzywe (fraktalne), których długość pomiędzy dwoma punktami jest nieskończona, choć „na oko” zupełnie tego nie widać. Fizycy nie powinni tak po prostu ignorować tego faktu, choćby dlatego, że od dawna znają zjawisko zwane ruchami Browna. Trajektoria cząstki wykonującej ruchy Browna jest właśnie fizyczną realizacją (modelem) takiej zwariowanej krzywej – wszędzie ciągłej, lecz nigdzie nieróżniczkowalnej.

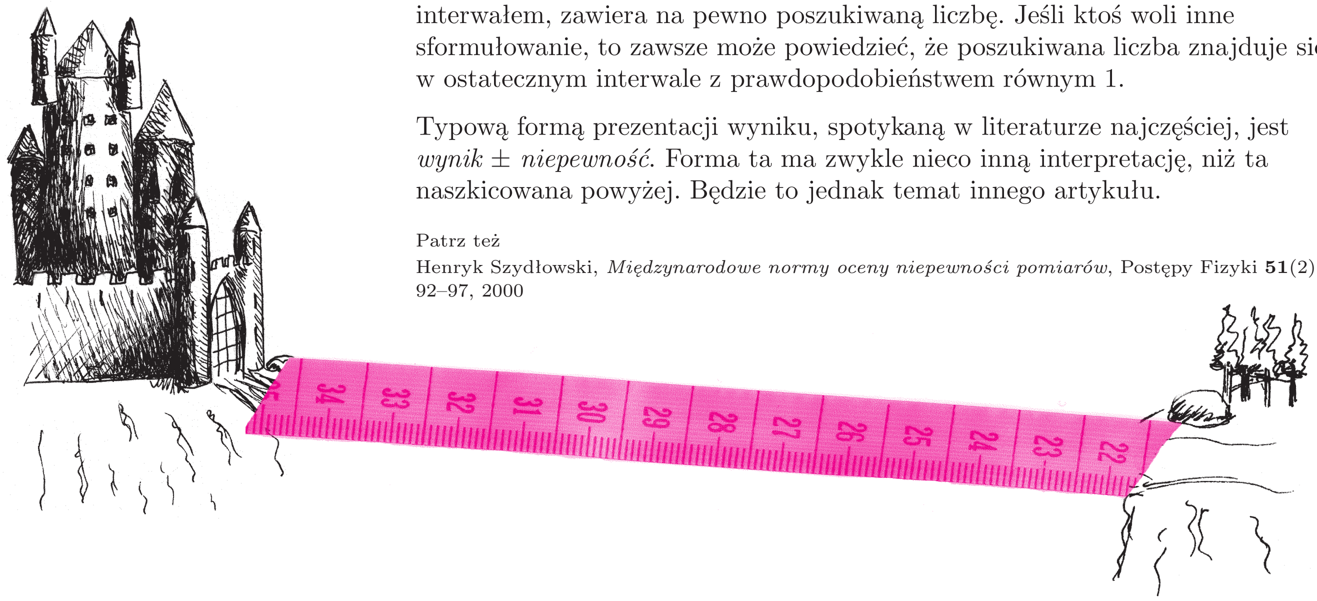
Widzimy, że w sytuacji idealnej, to znaczy przy nieobecności jakichkolwiek zakłóceń, prosty pomiar sprowadza się do zliczania działek elementarnych przyrządu pomiarowego. W tym artykule była to linijka, ale równie dobrze mógłby to być kątomierz, amperomierz, szybkościomierz, manometr, termometr, dynamometr, waga dwuszalkowa z kompletem odważników, itp. Jako regułę warto zapamiętać, że w tych prostych przypadkach **niepewność pomiaru jest równa połowie działki elementarnej** przyrządu pomiarowego.

Dobrym sposobem zapisu wyniku pomiaru jest podanie przedziału (interwału), w którym prawdziwa wartość mieści się z całą pewnością, co wymaga podania dwóch liczb. Autor jest gorącym zwolennikiem takiej formy raportowania wyników pomiarów, ponieważ znane są (por. *Delta* 9/1993, str. 1) i dobrze określone reguły operowania wynikami pomiarów podawanymi w tej właśnie postaci. Drugim argumentem, poza poprawnością matematyczną, jest to, że ostateczny rezultat operowania takimi wielkościami, który jest oczywiście interwałem, zawiera na pewno poszukiwaną liczbę. Jeśli ktoś woli inne sformułowanie, to zawsze może powiedzieć, że poszukiwana liczba znajduje się w ostatecznym interwale z prawdopodobieństwem równym 1.

Typową formą prezentacji wyniku, spotykaną w literaturze najczęściej, jest *wynik* ± *niepewność*. Forma ta ma zwykle nieco inną interpretację, niż ta naszkicowana powyżej. Będzie to jednak temat innego artykułu.

Patrz też

Henryk Szydłowski, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów*, Postępy Fizyki **51**(2), 92–97, 2000



Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delty!
Rozwiąż sierpniowe (tak, sierpniowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji:
http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Zadania

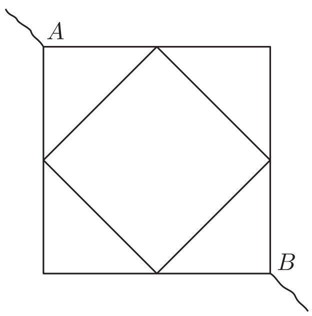
Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 994. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że
$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}.$$
Rozwiązanie na str. 4

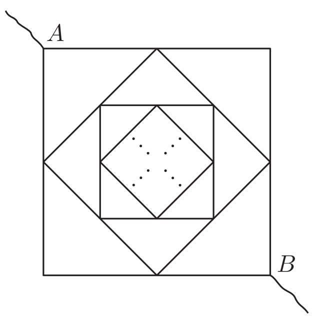
M 995. Czy $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną?
Rozwiązanie na str. 4

M 996. Rozważmy ciąg
$$x_n = (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$
gdzie q_n, r_n, s_n, t_n są liczbami całkowitymi. Znaleźć granice
$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n}.$$
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1



Rys. 2

F 575. Znaleźć opór między punktami A i B figury na rysunku 1, wykonanej z bardzo cienkiego drutu o oporności właściwej ρ, rozmiar boku figury wynosi a.
Rozwiązanie na str. 12

F 576. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, znaleźć opór między punktami A i B figury z rysunku 2. Liczba kwadratów w środku bardzo duża.
Rozwiązanie na str. 16