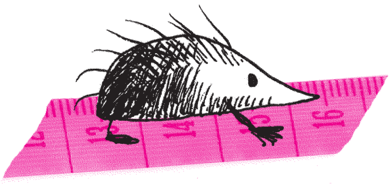
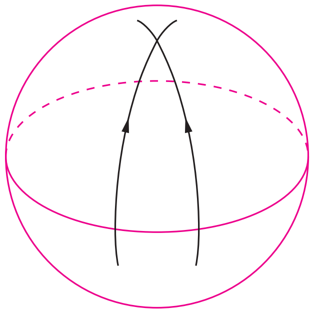


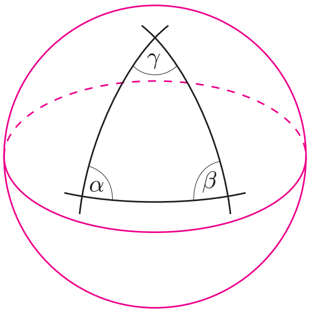
Zakrzywiona czasoprzestrzeń

Czym jest przestrzeń zakrzywiona? Możemy ją zdefiniować jako przestrzeń, której geometria różni się od geometrii euklidesowej, czyli tej, z którą spotykamy się na co dzień. Przyjrzyjmy się dwóm przykładom dwuwymiarowych przestrzeni zakrzywionych. Jednym z nich niech będzie sfera (rys. 1).



Rys. 1

Narysujmy na tej powierzchni linie geodezyjne, czyli krzywe będące (lokalnie) najkrótszymi drogami. Cienka gumka naciągnięta na takiej powierzchni układa się właśnie wzdłuż linii geodezyjnej. W płaskiej przestrzeni linie geodezyjne są liniami prostymi, w geometrii na powierzchni sfery geodezyjne są fragmentami kół wielkich. W geometrii euklidesowej geodezyjne przecinają się co najwyżej raz i mogą być nieskończone, na sferze są one zamknięte i przecinają się dwa razy; dwie linie geodezyjne początkowo równoległe, zbliżają się do siebie, mogą się nawet w końcu przeciąć. W przestrzeni euklidesowej – zgodnej z naszą intuicją przestrzenną – dwie proste równoległe nigdy się nie przecinają.



Rys. 2

Możemy też na takiej powierzchni zbudować trójkąt, którego suma kątów jest większa od stu osiemdziesięciu stopni, czyli od π (rys. 2), a jego pole powierzchni jest (dla sfery jednostkowej) dane ładnym wzorem

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

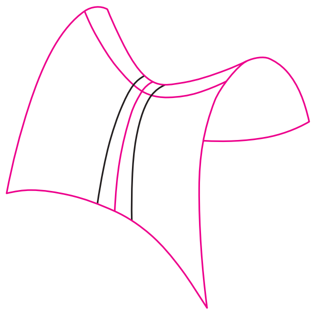
gdzie α, β, γ to kąty w wierzchołkach trójkąta. W przypadku euklidesowym wzór ten nie ma sensu, bo

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180°,$$

i dla określenia pola powierzchni trójkąta musimy jeszcze znać długość jednego z boków.

Pole powierzchni trójkąta krzywoliniowego na dowolnej powierzchni o stałej krzywiźnie wyraża się wzorem $kS = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, gdzie k jest *krzywizną* tej powierzchni. Na ogół k zmienia się od punktu do punktu, wzór ten więc dotyczy bardzo małych trójkątów – takich, że na ich obszarze k jest stała. Dla sfery o promieniu R krzywizna jest stała i równa $k = 1/R^2$.

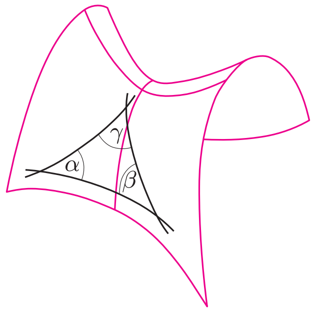
Wielkość kS jest miarą „zniekształcenia" powierzchni. W przypadku euklidesowym oczywiście jest $kS = 0$.



Rys. 3

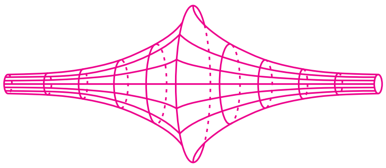
Weźmy z kolei inny przykład zakrzywionej powierzchni: powierzchnię siodła (rys. 3).

Widzimy, że teraz dwie linie geodezyjne początkowo równoległe, zaczynają się od siebie oddalać, a suma kątów w trójkącie może być mniejsza od stu osiemdziesięciu stopni (rys. 4).



Rys. 4

Innym przypadkiem powierzchni o ujemnej krzywiźnie jest pseudosfera, powstała przez obrót traktrysy wokół jej asymptoty.



Jej krzywizna jest stała i równa $k = -1/R^2$.

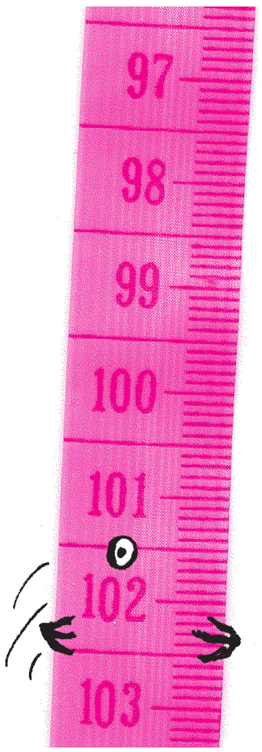
Traktrysa to krzywa, której odcinek stycznej od punktu styczności do OX ma stałą długość. Ta długość to właśnie R.

Pole powierzchni trójkąta wynosi tutaj (dla siodła o stałej krzywiźnie -1)

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

A jaki ma to wszystko związek z czasoprzestrzenią – będącą zbiorem zdarzeń, czyli punktów charakteryzowanych przez ich miejsce w przestrzeni (trzy współrzędne przestrzenne) i chwilę, w której zaistniały – punktów typu „teraz-tutaj"? Zakrzywienie czasoprzestrzeni jest związane bezpośrednio z występowaniem pola grawitacyjnego, generowanego przez jakieś źródła. Można na to patrzeć w ten sposób, że materia powoduje zakrzywienie czasoprzestrzeni, co z kolei zmienia tor ruchu ciał; tę zmianę możemy interpretować działaniem jakiejś siły, a właściwie pola. Pole, którego działanie przejawia się zakrzywieniem czasoprzestrzeni, nazywamy polem grawitacyjnym, działa ono na wszystkie obiekty we Wszechświecie obdarzone energią lub równoważnie masą.

Jak sobie wyobrazić zakrzywienie czasoprzestrzeni? O sferze, na której początkowo równoległe linie geodezyjne zbliżają się do siebie, mówimy, że ma „krzywiznę dodatnią", a o powierzchni siodła – gdzie początkowo równoległe linie geodezyjne oddalają się od siebie – że ma „krzywiznę ujemną". W czasoprzestrzeni linie świata (historie) cząstek spadających swobodnie są właśnie liniami geodezyjnymi, jeśli więc dwie początkowo równoległe linie świata cząstek swobodnych zbliżają się do siebie, mówimy, że czasoprzestrzeń ma krzywiznę dodatnią, a gdy oddalają się od siebie – że ma krzywiznę ujemną. Gdy pozostają w takiej samej odległości mówimy, że czasoprzestrzeń jest płaska.



Geometria czasoprzestrzeni Wszechświata opisana jest trzema głównymi modelami; różnią się one znakami krzywizny: $k = -1$ (trójwymiarowe przestrzenne powierzchnie stałego czasu miałyby wtedy ujemną krzywiznę przestrzenną, jak w przypadku powierzchni siodłowej), $k = +1$ (trójwymiarowe powierzchnie stałego czasu byłyby wtedy trójwymiarowymi sferami), lub $k = 0$ (model płaski, przestrzenne powierzchnie stałego czasu miałyby geometrię euklidesową).
Wartość k zależy od ilości materii we Wszechświecie. Jeśliby było jej bardzo mało, krzywizna byłaby równa -1, a obserwowana ekspansja Wszechświata trwałaby nieskończenie długo. Jeśli jest jej trochę więcej, k równałoby się zeru, a jeśli jeszcze więcej, wtedy $k = +1$, i powinien nastąpić taki moment, w którym ekspansja przeszłaby w proces odwrotny – zapadanie się. Paradoksalne jest to, że Wszechświat wypełniony małą ilością materii miałby geometrię różną od naszej intuicyjnej: długość okręgu jednostkowego byłaby większa od 2π, suma kątów w trójkącie mniejsza od π itd. Geometria euklidesowa pojawiłaby się dopiero wtedy, gdy materii byłoby odpowiednio dużo.

Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY