Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **427** (WT= 2,06) i **428** (WT= 1,02) z numeru 10/2001

Witold Bednarek	– Łódź	43,69
Jerzy Cisło	– Wrocław	42,95
Michał Adamaszek	– Kęty	42,87
Jacek Klisowski	– Lublin	37,98

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **429** (WT= 2,58) i **430** (WT= 1,44) z numeru 11/2001

Jerzy Cisło	– Wrocław	46,97
Michał Adamaszek	– Kęty	46,63
Witold Bednarek	– Łódź	45,13
Jacek Klisowski	– Lublin	37,98
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	36,38

Trzech uczestników ligi jednoczesnym rzutem na taśmę mija linię mety: J. Cisło po raz pierwszy, M. Adamaszek i W. Bednarek po raz drugi.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2002

Przypominamy treść zadań:

437. Liczba rzeczywista $a \geqslant 1$ oraz liczba zespolona z spełniają warunki $|z+a| \leqslant a$ oraz $|z^2+a| \leqslant a$. Dowieść, że $|z| \leqslant a$.

438. Wykazać, że jeżeli n jest liczbą naturalną, taką że $p = 8n+1$ jest liczbą pierwszą, to różnica $2^{4n}-1$ dzieli się przez p.

437. Podnosimy pierwszą nierówność do kwadratu i korzystając ze wzoru $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, przekształcamy do postaci

$$(z+a)(\bar{z}+a) \leqslant a^2,$$

czyli

$$|z|^2 \leqslant -a\bigl(z+\bar{z}\bigr). \tag{1}$$

Postępując analogicznie z drugą nierównością, mamy

$$|z|^4 \leqslant -a\bigl(z^2+(\bar{z})^2\bigr). \tag{2}$$

Lewa strona nierówności (1) jest liczbą nieujemną, więc prawa też. Można zatem podnieść tę nierówność do kwadratu, otrzymując

$$|z|^4 \leqslant a^2\bigl(z^2+(\bar{z})^2+2|z|^2\bigr),$$

czyli

$$a^{-1}|z|^4 - 2a|z|^2 \leqslant a\bigl(z^2+(\bar{z})^2\bigr). \tag{3}$$

Jeśli $z=0$, to oczywiście teza jest spełniona. Jeśli $z \neq 0$, dodajemy stronami nierówności (2) i (3) i po podzieleniu przez $|z|^2$ dostajemy

$$\bigl(1+a^{-1}\bigr)|z|^2 - 2a \leqslant 0.$$

Stąd

$$|z|^2 \leqslant \frac{2a^2}{a+1} \leqslant a^2 \qquad (\text{bo} \quad a \geqslant 1),$$

więc ostatecznie $|z| \leqslant a$.

438. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata p jest dzielnikiem liczby $2^{p-1}-1$, czyli iloczynu $(2^{4n}-1)(2^{4n}+1)$. Aby dowieść, że $2^{4n}-1$ dzieli się przez p, wystarczy wykazać, że $2^{4n}+1$ się przez p nie dzieli.

Przypuśćmy więc, wbrew tej tezie, że

$$2^{4n} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Weźmy pod uwagę liczbę $a = 2^{7n}+2^n$ oraz jej kwadrat

$$a^2 = 2^{14n}+2^{2n}+2\cdot 2^{8n} = \\ = 2^{2n}\bigl((2^{4n})^3+1\bigr)+2(2^{4n})^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Korzystając ponownie z małego twierdzenia Fermata, mamy

$$a^p \equiv a \pmod{p};$$

po pomnożeniu stronami przez a:

$$a^{p+1} \equiv a^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Jednocześnie

$$a^{p+1} = (a^2)^{4n+1} \equiv 2^{4n+1} = 2\cdot 2^{4n} \equiv -2 \pmod{p}.$$

Z uzyskanych związków wynika, że

$$2 \equiv -2 \pmod{p}.$$

Ale p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Sprzeczność kończy dowód.

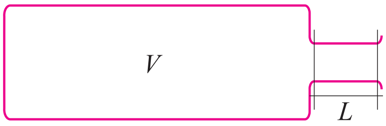
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2002

Przypominamy treść zadań:

334. Krasnoludki budują most o rozpiętości 5 piędzi posługując się przy tym kartami (cienkimi, sztywnymi i jednorodnymi płytkami prostokątnymi) o długości 1 piędzi i drugim boku znacznie krótszym. Kart się nie skleja i można je tylko układać jedna na drugiej. Ile wynosi minimalna liczba kart potrzebnych do tego, aby po moście mógł przejść krasnoludek o masie równej masie 2 kart?
Nie ma potrzeby analizować trudności wynikłych w trakcie samej budowy – np. krasnoludki mogą użyć rusztowania, które usuną po zakończeniu pracy.

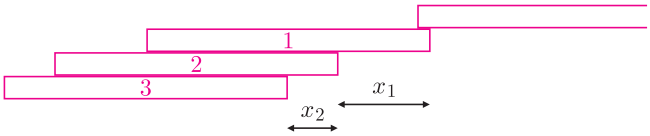
335. Dmuchając w wylot butelki można spowodować wystąpienie dźwięku. Obliczyć przybliżoną wartość jego częstotliwości, jeśli dana jest objętość butelki V, wymiary szyjki (pole przekroju poprzecznego S, długość L – zob. rys. 1) oraz parametry powietrza (np. gęstość ρ, ciśnienie p i stosunek ciepeł właściwych $\gamma = c_p/c_v$, albo też prędkość dźwięku v).
Wskazówka: przyjąć, że powietrze w szyjce butelki jest „tłokiem”, który drgając spręża i rozpręża resztę powietrza w butelce.



Rys. 1

334. Schemat konstrukcji mostu przedstawia rysunek 2. Oczywiste jest, że górna karta powinna być podparta na swoich końcach, a pozostałe karty mogą być wysunięte jedna nad drugą tylko tyle, aby pozostały w równowadze przy każdym położeniu krasnoludka. Największe zagrożenie konstrukcji wystąpi w chwili, gdy krasnoludek znajdzie się na jednym z końców górnej karty, gdyż wtedy cały jego ciężar (plus połowa ciężaru górnej karty) obciąża jedną połowę mostu, a ramię tej siły względem każdego z ewentualnych punktów obrotu kart jest maksymalne.

Rys. 2

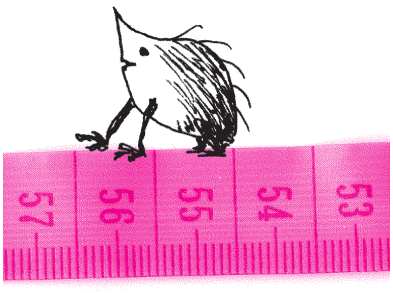


Rys. 3

Rozpatrzmy równowagę karty podpierającej obciążony koniec (oznaczonej na rysunku 3 numerem 1), która jest przesunięta względem poprzedniej karty 2 o x_1 jednostek. Przyjmując koniec karty 2 jako punkt odniesienia, stwierdzamy, że maksymalna wartość x_1 jest rozwiązaniem równania

$$2{,}5x_1 = 0{,}5 - x_1,$$

a więc $x_1 = 1/7$. Rozpatrując równowagę karty 2 względem końca karty 3, wyznaczamy $x_2 = 1/9$, dalej $x_3 = 1/11$ itd., a suma $\sum x_i$ musi przekroczyć 2 jednostki (gdyż jest to połowa rozpiętości mostu, liczonej bez środkowego przęsła). Jak wynika z obliczeń, trzeba dodać 162 wyrazy ciągu, czyli łącznie potrzeba 325 kart. (Ma się rozumieć, ta liczba wystarczy tylko wtedy, gdy krasnoludek będzie przechodził po moście bardzo ostrożnie!)



335. Sprężanie i rozprężanie powietrza zawartego w butelce zachodzi tak szybko, że ciepło nie zdąży przepłynąć z otoczenia, czyli zjawisko można uznać za proces adiabatyczny (podobnie jak w odniesieniu do rozchodzenia się fali dźwiękowej). Dlatego spełnione jest równanie $\frac{\Delta p}{p} = -\gamma\frac{\Delta V}{V}$, gdzie Δp jest zmianą ciśnienia spowodowaną przez zmianę objętości gazu o ΔV. Niech Δx będzie przesunięciem „tłoka”; wtedy $\Delta V = S\Delta x$, a siła przywracająca położenie równowagi wynosi

$$F = S\Delta p = -\frac{\gamma p S^2}{V}\Delta x.$$

Ułamek występujący przed Δx możemy uznać za „stałą sprężystości” k, a po skorzystaniu ze znanego wzoru na częstotliwość drgań harmonicznych $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ i podstawieniu masy powietrza w szyjce $m = SL\rho$ możemy wyznaczyć f:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S\gamma p}{VL\rho}} = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{VL}}.$$

Na przykład, podstawiając $v = 330$ m/s, $S = 2$ cm^2, $L = 3$ cm, $V = 1$ dm^3, otrzymujemy $f \approx 136$ Hz.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **326** ($WT = 2{,}95$) i **327** ($WT = 1{,}08$)
z numeru 11/2001

Jacek Piotrowski	– Rzeszów	42,82
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,62
Aleksander Surma	– Myszków	39,95
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,77
Marek Wójcicki	– Szczecin	32,03