7/02 (55)

Γ-limatias

O RÓWNYCH SUMACH SIÓDMYCH POTĘG

Oto różnego typu rozwiązania zawierające osiem siódmych potęg:

(7.4.4) $149^7 + 123^7 + 14^7 + 10^7 = 146^7 + 129^7 + 90^7 + 15^7$,
(7.3.5) $96^7 + 41^7 + 17^7 = 86^7 + 77^7 + 77^7 + 68^7 + 56^7$,
(7.2.6) $125^7 + 24^7 = 121^7 + 94^7 + 83^7 + 61^7 + 57^7 + 27^7$,
(7.1.7) $568^7 = 525^7 + 439^7 + 430^7 + 413^7 + 266^7 + 258^7 + 127^7$.

Na uwagę zasługują również następujące równości

$698^7 + 556^7 + 443^7 + 184^7 = 673^7 + 625^7 + 353^7 + 230^7$,
$698^3 + 556^3 + 443^3 + 184^3 = 673^3 + 625^3 + 353^3 + 230^3$,
$698 + 556 + 443 + 184 = 673 + 625 + 353 + 230$.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (30')

Wyjaśnienie oszustwa (30): Teza zadania jest fałszywa! Niech bowiem ABC będzie dowolnym trójkątem o kącie prostym przy wierzchołku C. Wówczas środek boku AB jest zarazem środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zatem podane w treści zadania punkty leżą na jednej prostej. Poprawna teza zadania powinna brzmieć: trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny. Dowód jak podany poprzednio – nie zaszkodziłoby uzupełnić go rysunkiem w przypadku, gdy kąt przy wierzchołku C jest rozwarty.

DWIE HIPOTEZY (2)

Hipoteza. Istnieje 65000 kolejnych liczb naturalnych, wśród których więcej niż 10% liczb jest pierwszych.

Argumenty na poparcie hipotezy:

Nie udowodniono, że liczb pierwszych bliźniaczych (tzn. par liczb pierwszych różniących się o 2) jest nieskończenie wiele, ale uwierzyć w to nietrudno. Znając gęstość występowania liczb pierwszych wśród liczb określonej wielkości i czyniąc założenie (niczym ścisłym nie uprawnione), że liczby pierwsze są rozmieszczone losowo z taką gęstością, można zabawić się w przewidywanie, jak dużo par liczb bliźniaczych spodziewamy się znaleźć w określonym przedziale. No, może niezupełnie losowo, bo dwie kolejne liczby naturalne pierwszymi raczej nie będą, ale nietrudno w owej losowości uwzględnić takie efekty, jak parzystość czy reszta z dzielenia przez 3, 5 i coś tam jeszcze, w zależności od tego, jak precyzyjnymi chcemy uczynić nasze przewidywania.

Otóż przewidywania w tak naiwny sposób otrzymane zgadzają się zadziwiająco dobrze z danymi pochodzącymi z bezpośrednich poszukiwań liczb bliźniaczych za pomocą komputera. Podobnie można rozważać inne konfiguracje postaci

$$p, p+r_2, p+r_3, \ldots, p+r_k,$$

gdzie

$$0 < r_2 < r_3 < \ldots < r_k,$$

pytając, czy wymienione liczby mogą być jednocześnie pierwsze i co więcej, czy istnieje nieskończenie wiele takich układów liczb pierwszych. Konfrontując przewidywania z doświadczeniem, można dojść do wniosku, że takie układy liczb pierwszych istnieją zawsze wtedy, gdy nie widać powodów, dla których istnieć by nie mogły.

Dokładniej, całkiem rozsądne jest sformułowanie hipotezy pomocniczej:

Hipoteza pomocnicza. Jeżeli liczby

$$r_1 = 0 < r_2 < r_3 < \ldots < r_k$$

spełniają warunek:

Dla dowolnej liczby pierwszej q wśród reszt z dzielenia liczb $r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots,\ r_k$ przez q nie występują wszystkie reszty $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ q-1$,

to istnieje nieskończenie wiele takich liczb p, że wszystkie liczby $p,\ p+r_2,\ p+r_3, \ldots, p+r_k$ są pierwsze.

Nie możemy bowiem łudzić się, że znajdziemy nieskończenie wiele trójek liczb pierwszych $p, p+2, p+4$ z uwagi na to, że jedna z tych liczb zawsze jest podzielna przez 3.

Bez trudu jednak przychodzi znajdowanie czworaczków liczb pierwszych, tzn. układów liczb pierwszych postaci $p,\ p+2,\ p+6,\ p+8$. Wykluczamy przy tym układ powstający dla $p=5$. Jak blisko siebie mogą być kolejne czworaczki? Doświadczenie (lista czworaczków do 1000000) pokazuje, iż nie mogą być odległe o mniej niż 90. Jednak liczby $0, 2, 6, 8, 30, 32, 36, 38$ (jako $r_1, \ldots, r_8$) spełniają założenia sformułowanej wyżej hipotezy, więc oczekiwać należy istnienia czworaczków różniących się o 30. I rzeczywiście, tak bliskie czworaczki otrzymujemy zaraz za milionem dla $p = 1006301$ i $p = 1006331$.

Ten przykład dowodzi, że w poszukiwaniu bardziej wymyślnych konfiguracji liczb pierwszych nie obowiązuje zasada: im dalej, tym gorzej.

Niech teraz P będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych większych od 1455 i mniejszych od 32500 z następującymi wyjątkami: do zbioru P należą także liczby 1019, 1129, 1277, 1279, 1319, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1439; do zbioru P nie należą liczby 1481, 1499, 1523, 1549, 1571, 1637.

Niech teraz R będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $32497 \pm q$, gdzie $q \in P$.

Można sprawdzić (komputer), że tak określony zbiór $R = \{r_1,\ r_2, \ldots, r_{6522}\}$ spełnia warunki hipotezy pomocniczej. Największą liczbą w zbiorze R jest 64994, a zbiór R ma 6522 elementów. Należy więc oczekiwać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których wszystkie liczby $p+r$, gdzie $r \in R$, są pierwsze. To daje 6522 liczby pierwsze wśród 65000 kolejnych liczb naturalnych i skłania do uwierzenia w sformułowaną na początku hipotezę.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl