Ciągi Pisota, czyli jak ZOBACZYĆ rekurencję liniową

Jarosław WRÓBLEWSKI

Ciągiem Pisota nazywamy ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym pierwsze dwa wyrazy są dowolne, a każdy kolejny wybrany jest tak, aby wraz z dwoma poprzednimi z najlepszym przybliżeniem tworzył ciąg geometryczny. Dokładniej, dla danych a_1 i a_2 ciąg Pisota (oznaczany $E(a_1, a_2)$) zdefiniowany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{a_{n+1}^2}{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Okazuje się, że ciągi Pisota „lubią" spełniać rekurencje liniowe, np. najprostszy nietrywialny ciąg Pisota $E(2,3)$ jest ciągiem Fibonacciego z rekurencją drugiego stopnia

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Dowolny ciąg Pisota z $a_1 \leq 3$ spełnia rekurencję liniową stopnia co najwyżej trzeciego: np. ciąg $E(3,7)$ spełnia rekurencję

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Z kolei o ciągu $E(4,13)$ udowodniono, że nie spełnia żadnej rekurencji liniowej. Jednakże dla $n = 1, 2, \ldots, 18$ zachodzi wzór

$$a_{n+6} = 3a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} + a_n,$$

tzn. ciąg $E(4,13)$ spełnia rekurencję liniową szóstego stopnia do wyrazu a_{24} włącznie.

Wiele ciągów Pisota ma także właśnie kapryśną naturę: spełniają rekurencję liniową, ale do czasu. Moim ulubionym przykładem jest ciąg $E(10,219)$, który spełnia rekurencję stopnia 4, a mianowicie

$$a_{n+4} = 22a_{n+3} - 3a_{n+2} + 18a_{n+1} - 11a_n,$$

jednak tylko dla

$$n + 4 \leqslant 1402.$$

Wyrazu a_{1403} już się powyższym wzorem otrzymać nie da.

Dlaczego ciągi Pisota lubią spełniać rekurencje liniowe, jak też i uwielbiają się z nimi rozstawać po wspólnym przejściu wielu wyrazów? Pytanie to należy odwrócić. Dlaczego ciągi liniowo rekurencyjne bywają ciągami Pisota, czasami na zawsze, a czasami tylko na kilkaset wyrazów?

Co sprawia, że dany ciąg (a_n) jest ciągiem Pisota? Otóż musi on spełniać warunek

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n < \frac{1}{2} \qquad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Przyjrzyjmy się więc liczbom

$$r_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n,$$

które dalej będziemy nazywać zaokrągleniami.

Jeśli ciąg (a_n) spełnia rekurencję liniową stopnia k, powiedzmy

$$a_{n+k} = A_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + A_1 a_{n+1} + A_0 a_n,$$

to możemy związać z nim wielomian charakterystyczny

$$x^k - A_{k-1}x^{k-1} - \ldots - A_1 x - A_0.$$

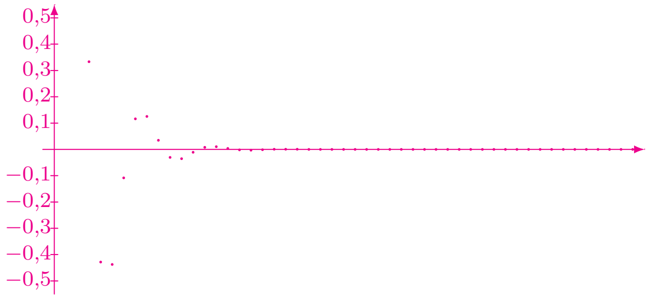
W typowej sytuacji pierwiastki zespolone $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tego wielomianu są różne i wówczas ciąg (a_n) jest postaci

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n,$$

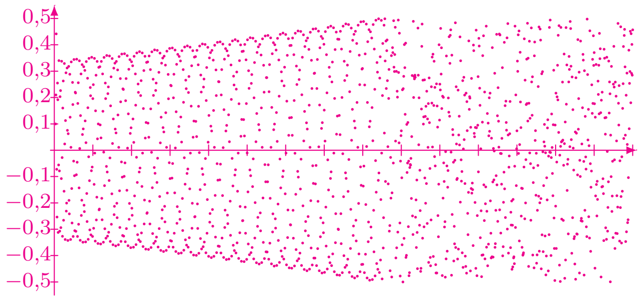
gdzie $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są liczbami zespolonymi.

Przypuśćmy, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego uporządkowane są nierosnąco według wartości bezwzględnej, tzn.

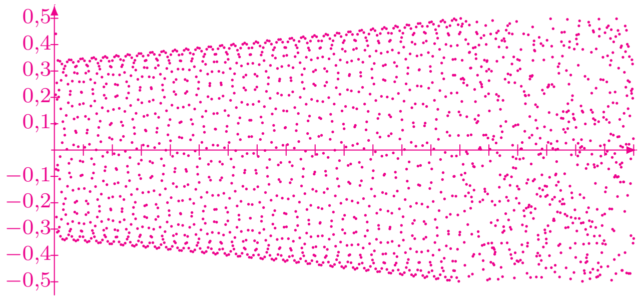
$$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \ldots \geqslant |x_k|.$$



Ciąg $E(3,7)$ spełnia rekurencję trzeciego stopnia, przy czym pierwiastki x_2 i x_3 są małe. Wykres pokazuje to wyraźnie, chociaż zbyt ciekawy nie jest – r_n dąży szybko do zera.



Ciąg $E(10,119)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 856. wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1{,}0004657$.



Ciąg $E(10,219)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 1402. wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1{,}0002811$.

W typowej, interesującej nas sytuacji, kiedy ciąg liniowo rekurencyjny jest (trwale lub chwilowo) ciągiem Pisota, tzn. kiedy zachowuje się prawie jak ciąg geometryczny, największy pierwiastek x_1 jest dodatni, istotnie większy od pozostałych pierwiastków i od 1. Natomiast dla dużych n mamy

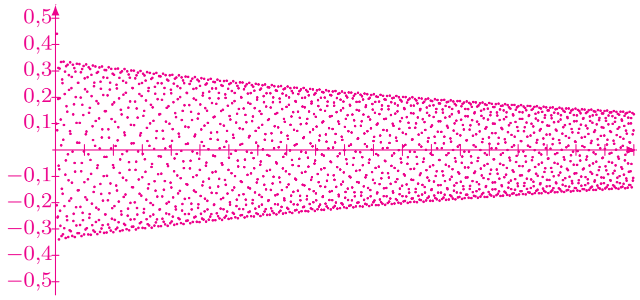
$$r_n \approx d_2 x_2^n + d_3 x_3^n + \ldots + d_k x_k^n,$$

czyli zachowanie ciągu zaokrągleń (r_n) zależy od drugiego co do wielkości pierwiastka wielomianu charakterystycznego (liczby $d_2, d_3, \ldots, d_k$ są tu pewnymi liczbami zespolonymi).

Jeśli $|x_2| < 1$, to (zaniedbując wpływ pozostałych, mniejszych pierwiastków) należy oczekiwać, że wraz ze wzrostem n liczba r_n będzie coraz bardziej zbliżać się do zera, więc skoro nierówność

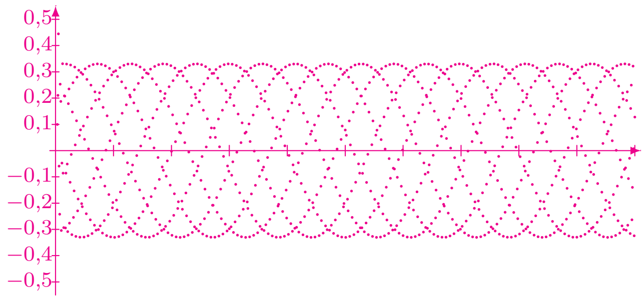
$$-\frac{1}{2} \leqslant r_n < \frac{1}{2}$$

była spełniona przez czas jakiś, to im dalej, tym łatwiej będzie ona spełniona.



Ciąg $E(10,181)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 0{,}99956939$.

Jeśli $|x_2| = 1$, to wraz ze wzrostem n liczba r_n nie ma tendencji do oddalania się ani zbliżania do zera; jeśli więc przez długi czas mieściła się ona w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, to jest świetna szansa, że nigdy z niego nie wyjdzie.



Ciąg $E(10,19)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module 1.

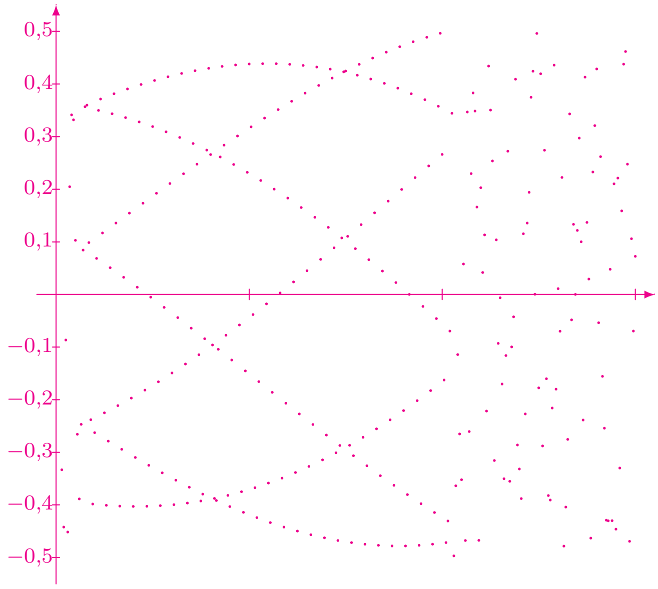
Jeśli zaś $|x_2| > 1$ (nieznacznie), to wyjście r_n poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest zagwarantowane.

W przypadku wspomnianego już ciągu $E(10,219)$ pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1{,}0002811$. Dlatego potrzeba ponad 1000 wyrazów, aby r_n „wyszło" poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

W ciekawych przykładach właśnie taka sytuacja jest typowa: jeden duży pierwiastek, para pierwiastków zespolonych sprzężonych o module bliskim 1, pozostałe pierwiastki małe.

Jak zobaczyć rekurencję liniową?

Popatrzmy na wykres ciągu zaokrągleń (r_n) związanych z ciągiem $E(6,52)$.



Ciąg $E(6,52)$ spełnia rekurencję czwartego stopnia do 205. wyrazu. Na rysunku widać to jak na dłoni.

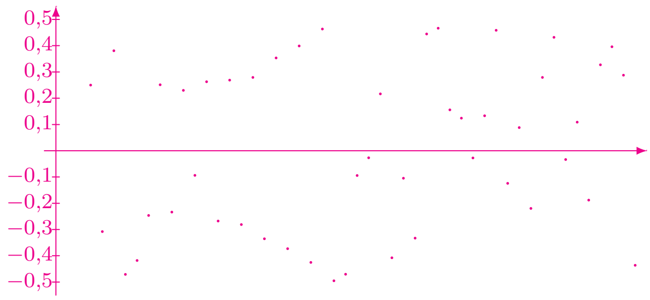
Załamująca się regularność wykresu nie wynika z tego, że komputer nagle przestał sobie radzić z dużymi liczbami i popełnia błędy. Po prostu do 205. wyrazu ciąg $E(6,52)$ spełnia rekurencję stopnia 5

$$a_{n+5} = 9a_{n+4} - 3a_{n+3} + a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n.$$

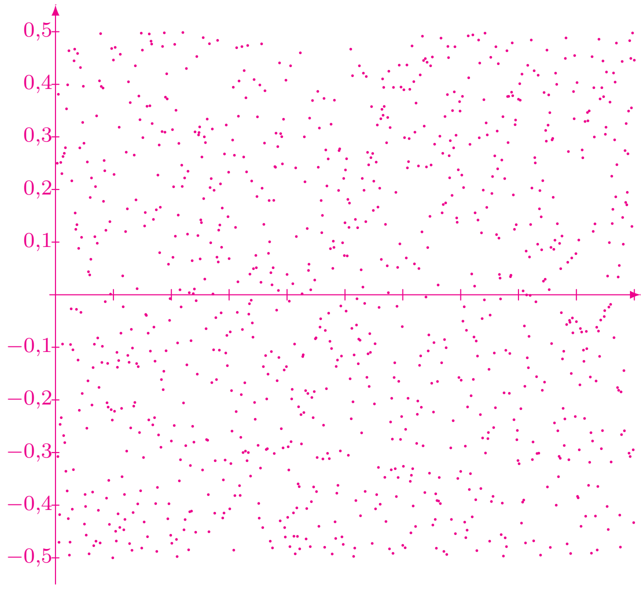
A potem przestaje, o co postarała się para pierwiastków zespolonych sprzężonych równania charakterystycznego rekurencji, o module $\approx 1{,}00126$.

Patrząc na wykres zaokrągleń ciągu $E(4,13)$, łatwo teraz uwierzyć, że nie spełnia on żadnej rekurencji liniowej.

Skoro udało mi się zbudować przekonanie, że patrząc na rysunek, można zobaczyć, czy ciąg Pisota spełnia rekurencję liniową, czy też nie, postaram się teraz to przekonanie trochę zburzyć.



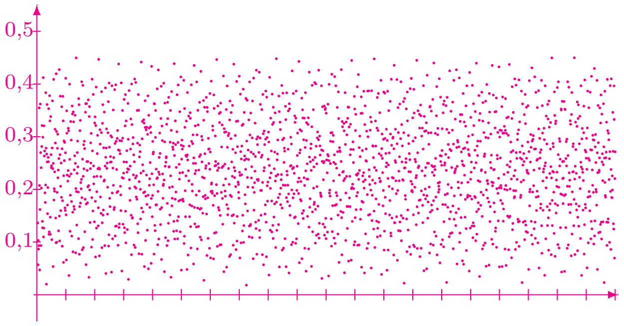
Dla ciągu $E(4,13)$ mamy rekurencję szóstego stopnia, która urywa się po 24. wyrazie (na wykresie r_n dla $n \leqslant 50$)...



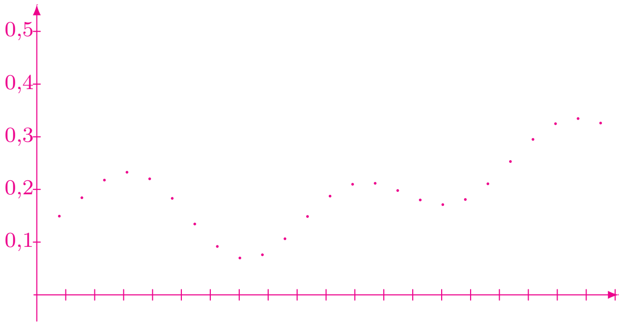
. . .a potem już tylko losowa sieczka.

Rekurencja, której nie widać

Popatrzmy na wykres zaokrągleń dla ciągu $E(313580, 401583)$. Widzimy losowy układ punktów, pewnie ten ciąg nie spełnia rekurencji liniowej, gdyż takowa wymusiłaby przecież pewną regularność rysunku. To teraz posieję niepokój: jak to się dzieje, że losowo wybrane liczby z przedziału $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ są wszystkie dodatnie? A jeśli wybierzemy punkty odpowiadające indeksom $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 78)$, to czy dalej wierzymy w losowość wykresu?



Zaokrąglenia ciągu $E(313580, 401583)$ sprawiają wrażenie losowości. . .

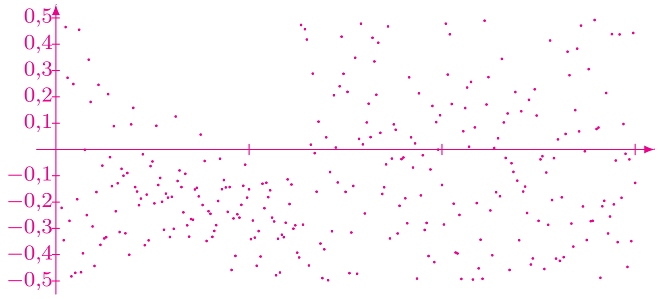


. . . ,chyba że wybierzemy co 78. punkt wykresu.

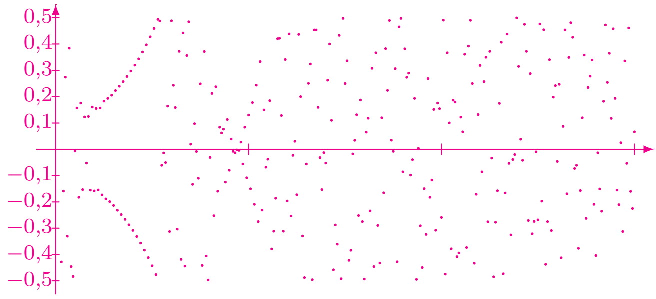
Okazuje się, że ciąg ten spełnia rekurencję stopnia 9:

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} - a_{n+3} - a_{n+1} + a_n,$$

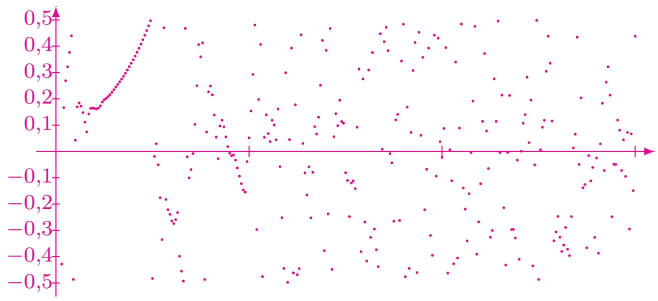
której wielomian charakterystyczny ma największy pierwiastek $\approx 1{,}28$ oraz siedem pierwiastków o module 1: jedynkę i trzy pary pierwiastków zespolonych sprzężonych. Jedynka odpowiada za podniesienie wykresu do góry, a pary pierwiastków sprzężonych są odpowiedzialne za sinusoidalne wahania r_n, jednak nałożenie trzech takich wahań o różnych częstościach daje złudzenie całkowitej losowości.



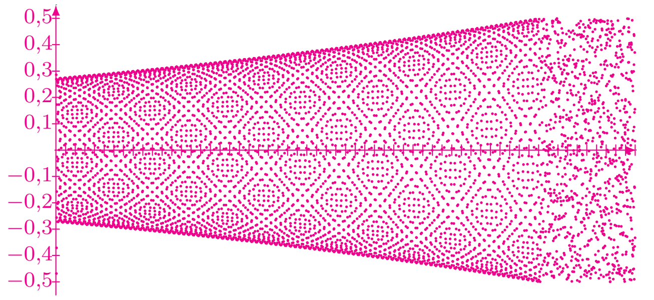
Rekurencja 14. stopnia spełniona do wyrazu 126. Z uwagi na wysoki stopień rekurencji punkty wykresu nie tworzą linii, ale brak losowości widoczny jest jako obszar, w którym nie ma żadnych punktów wykresu. Aż sześć pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest bezwzględnie większych od 1, przy czym $x_2 = 1{,}0096218$.



Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 54.



Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 50.



Ciąg $E(14, 128)$ spełnia rekurencję piątego stopnia

$$a_{n+5} = 10a_{n+4} - 8a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n$$

do wyrazu a_{5015} włącznie (na wykresie zaokrąglenia do r_{6000}). Wielomian charakterystyczny ma parę pierwiastków zespolonych sprzężonych o module $\approx 1{,}0001216657$.