

Zaskakujący pręt

Mateusz GORYCA, Adam DZIAŁAK

Własności fal wzbudzanych w prostych rezonatorach, które można traktować jako jednowymiarowe, są powiązane prostymi zależnościami: częstotści kolejnych modów są wielokrotnościami częstotści modu podstawowego, a odległości między kolejnymi węzłami są równe.

Takimi szkolnymi przykładami rezonatorów są np. struny. Są „popularność” zawdzięczają prostocie opisu. Trudno natomiast znaleźć w podręcznikach wyczerpujący opis innego prostego rezonatora – luźno zawieszono cienkiego pręta (mającego oba końce swobodne). Dlaczego tak jest? Otóż drgania tego na pozór prostego „przyrządu” są znacznie bardziej skomplikowane. Tym samym pręt może być nader ciekawym obiektem doświadczeń. Żeby się o tym przekonać, wystarczy przeprowadzić eksperyment za pomocą układu przedstawionego na rysunku 1, co też uczyniliśmy.

Zamiast pręta użyliśmy cienkościennej rurki aluminiowej, o średnicy zewnętrznej 12,5 mm i grubości ścianek 0,8 mm, pochodzącej z popularnych dzwonek kupionych w sklepie orientalnym. Przez wywierony w poprzek rurki niewielki otwór przewlekliśmy cienką nić, na której zawiesiliśmy obiekt naszego doświadczenia. Założyliśmy na rurkę tłumik z kawałka zgiętego, sprężystego drutu trzymanego w ręce (zamiast drutu można użyć np. wygiętej agrafki), którego zadaniem było tłumienie drgań w miejscu jego zamocowania. Doświadczenie powtórzyliśmy dla czterech rurek, różniących się tylko długością (odpowiednio 250, 260, 270 i 290 mm).

Eksperyment polegał na znalezieniu takich położenia tłumika, przy których uderzony pręt wydaje długi, niestłumiony dźwięk. Takie położenia to, podobnie jak dla struny, węzły fal stojących. Wykorzystując dodatkowo cyfrowy oscyloskop z możliwością przeprowadzenia analizy widma dźwięku wydawanego przez pręt (za taki oscyloskop posłużył nam zwykły komputer, wyposażony w mikrofon i jeden z darmowych, dostępnych w Internecie programów analizujących widmo dźwięku), mogliśmy odróżnić węzły odpowiadające kolejnym modom drgań pręta oraz zmierzyć częstotść tych modów. Przykładowe wyniki pomiarów (położenia węzłów) dla trzech modów, dla pręta o długości 290 mm przedstawia rysunek 2. Częstotści tych modów wynoszą odpowiednio: 860 Hz, 2340 Hz, 4440 Hz. Jak widać z rysunku, sytuacja jest bardziej skomplikowana niż dla struny, gdyż odległości między węzłami nie są jednakowe, i odległość między pierwszym węzłem a końcem pręta nie stanowi połowy żadnej z nich. Nie można więc w prosty sposób wyznaczyć długości fali stojącej powstającej w pręcie. Ponadto zależność częstotści drgań od numeru modu nie jest liniowa, jak to ma miejsce w przypadku struny. Aby zrozumieć „dziwne” drgania pręta, należy rozważyć równanie ruchu. Dla cienkiego pręta podstawowym równaniem jest (wyprowadzenie można znaleźć w trzatomowej *Encyklopedii Fizyki PWN* pod hasłem „pręty”):

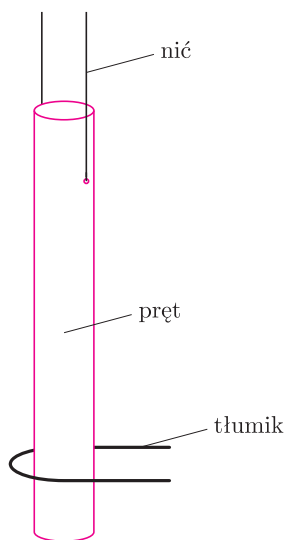
$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

gdzie $y(x, t)$ jest wychyleniem z położenia równowagi, x współrzędną liczoną wzdłuż pręta, t czasem, a A pewną dodatnią stałą (zależną od modu Younga, przekroju poprzecznego i gęstości). Szukając rozwiązań w postaci fali stojącej, możemy zapisać wychylenie jako iloczyn czynników, z których jeden zależy tylko od położenia, a drugi od czasu $y(x, t) = y_1(x) \cdot y_2(t)$. Stąd:

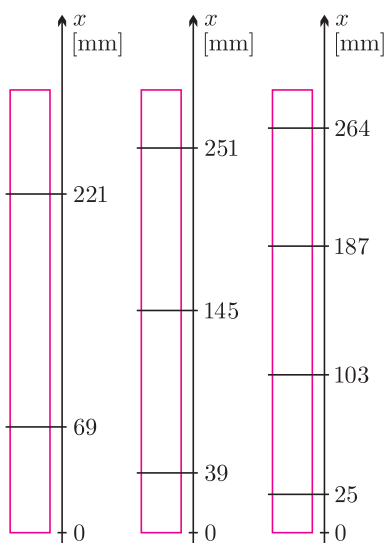
$$(2) \quad \frac{\partial^2 (y_1(x) \cdot y_2(t))}{\partial t^2} = y_1(x) \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^4 (y_1(x) \cdot y_2(t))}{\partial x^4} = y_2(t) \frac{d^4 y_1(x)}{dx^4}.$$

Podstawiając powyższe zależności do (1) i przekształcając, otrzymujemy:

$$(3) \quad \frac{1}{y_2(t)} \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = \frac{-A}{y_1(x)} \frac{d^4 y_1(x)}{dx^4}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Widać, że obie strony równania (3) muszą być stałymi, bo są funkcjami różnych zmiennych (odpowiednio t i x).

Dla lewej strony warunek ten jest spełniony dla dowolnej kombinacji liniowej funkcji trygonometrycznych $a_i \sin(\pm\omega t + \phi_i)$ o tej samej częstotliwości kołowej ω lub dla dowolnej kombinacji liniowej funkcji wykładniczych $b_i \exp(\pm\omega t + \psi_i)$ (gdzie a_i, b_i są dowolnymi rzeczywistymi amplitudami, a ϕ_i, ψ_i dowolnymi rzeczywistymi fazami). W pierwszym przypadku lewa strona jest równa $-\omega^2$, a w drugim $+\omega^2$. Natomiast prawą stronę spełniają dowolne kombinacje liniowe funkcji sinus i funkcji wykładniczej o tej samej liczbie falowej k :

$$(4) \quad c_j \sin(\pm kx + \phi_j) + d_j \exp(\pm kx + \psi_j),$$

a wartość prawej strony wynosi wtedy $-Ak^4$. Ponieważ wyrażenie to jest ujemne, musimy odrzucić rozwiązania zależności czasowej w postaci kombinacji liniowej funkcji wykładniczych. Ostatecznie okazuje się, że częstotaść $f = \omega/2\pi$ jest proporcjonalna do kwadratu liczby falowej k :

$$(5) \quad f = C \cdot k^2,$$

gdzie $C = 2\pi\sqrt{A}$.

Można dowieść, że druga i trzecia pochodna odchylenia względem zmiennej x w danym punkcie są proporcjonalne odpowiednio do momentu siły i do siły działających w tym punkcie. Ponieważ moment i siła na obu końcach pręta muszą być równe zero, druga i trzecia pochodna także muszą wynosić zero. Teoretyczne przewidywania wynikające z tychże warunków brzegowych prowadzą do wniosku, że możliwe wartości liczby falowej k są rozwiązaniami równań:

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = -\operatorname{tgh} \frac{kl}{2} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \operatorname{tgh} \frac{kl}{2},$$

gdzie l jest długością pręta. Obliczone numerycznie wartości kl dla różnych modów są następujące: 4,7300; 7,8532; 10,9956. Aby otrzymać odpowiednie wartości k dla konkretnego pręta, wystarczy podzielić powyższe wartości przez jego długość l . Jeżeli przedstawimy teraz na wykresie zależności logarytmu zmierzonych częstotliwości (dla czterech zbadanych prętów) od logarytmu tak wyliczonych wartości k , to okaże się, że nasze punkty doświadczalne układają się na prostej, której współczynnik kierunkowy jest z dużą dokładnością równy 2 (rys. 3).

Oznacza to, że częstotaści kolejnych modów są wprost proporcjonalne do k^2 , co zgodne jest z przewidywaniami teoretycznymi.

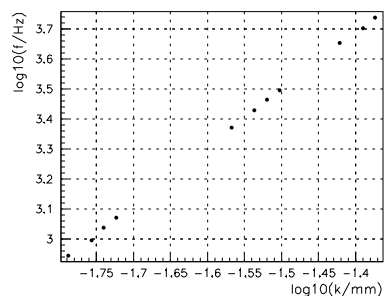
Wykorzystując tak obliczone wartości kl , możemy również wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $y_1(x)$ (wzór (2)), czyli węzły fali stojącej wzbudzonej w pręcie (obliczenia, również wykorzystujące warunki brzegowe, pomijamy). Po przedstawieniu na wykresie zależności wyników otrzymanych doświadczalnie (dla czterech prętów) od otrzymanych teoretycznie, okaże się, że punkty na wykresie układają się wzdłuż prostej o równaniu $y = x$ (rys. 4), czyli zgodnie z oczekiwaniami.

Jak widać, nawet tak proste doświadczenie, jak przedstawione w artykule, może dostarczyć zaskakujących wyników. Jest to o tyle ciekawe, że ich opis jest rzadko spotykany i niewiele osób zdaje sobie sprawę z faktu, jak skomplikowanym rezonatorem może być zwykły pręt (rurka). Dlatego warto się czasem przyjrzeć z pozoru oczywistym zjawiskom i sprawdzić, czy rzeczywiście ich przebieg jest tak prosty, jak nam się wydaje.

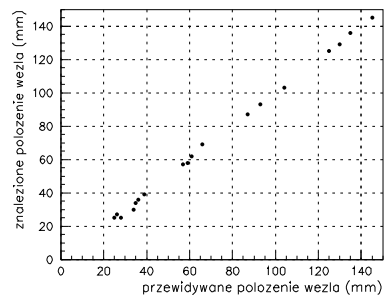
Korzystając z okazji, pragniemy jednocześnie podziękować Panu profesorowi Janowi Gajowi za poświęcony nam czas i pomoc, bez której nie powstałby niniejszy artykuł.

Pracę wykonano na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w ramach warsztatów naukowych organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci.

W przypadku fal sinusoidalnych liczba falowa k wynosi $2\pi/\lambda$. W naszym przypadku powstała fala stojąca jest superpozycją fal sinusoidalnych i wykładniczych, w związku z tym w prosty sposób nie da się go wyznaczyć z odległości między węzłami.



Rys. 3



Rys. 4