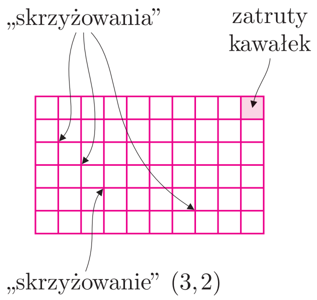
O słodkiej strategii

Mikołaj ROTKIEWICZ

Rozważmy następującą grę, która słodko się zaczyna, a kończy się śmiercią. Dana jest prostokątna tabliczka czekolady złożona z $m \times n$ kawałków, w której prawy, górny kawałek jest zatruty (rysunek). W grze uczestniczy zaczynający gracz A oraz gracz B. Gracze wykonują posunięcia na przemian. Ruch gracza polega na wybraniu „skrzyżowania” (może to być także skrzyżowanie o kształcie litery T z górnego lub prawego boku tabliczki) i zjedzeniu wszystkich kawałków znajdujących się na lewo i w dół od wybranego skrzyżowania. Przegrywa gracz, który musi zjeść zatruty kawałek.



W przypadku ogólnym skrzyżowanie (i, j) oznacza punkt o współrzędnych (i, j), gdy początek układu współrzędnych znajduje się w lewym dolnym rogu tabliczki czekolady, osie leżą na brzegu czekolady, a jednostką jest długość boku dowolnego z $m \cdot n$ jednakowych, kwadratowych kawałków czekolady.

Okazuje się, że na przykład dla kwadratowej tabliczki czekolady można łatwo wskazać strategię wygrywającą dla gracza A. Załóżmy bowiem, że nasza tabliczka ma wymiar $m \times m$. W pierwszym ruchu gracz A wybiera skrzyżowanie $(m-1, m-1)$. Wówczas B musi wybrać skrzyżowanie (m, i) lub (i, m) dla pewnego i. Gracz A na każdy ruch gracza B odpowiada ruchem symetrycznym tak, że po posunięciu pozostała część czekolady ma oś symetrii przechodzącą przez skrzyżowania postaci (i, i). Widać, że gracz B będzie zmuszony do posunięcia (m, m) i zjedzenia zatrutego kawałka.

A jak grać w przypadku ogólnym? Według dostępnych autorowi źródeł ogólna strategia nie jest znana. Okazuje się jednak, że niezależnie od wymiarów tabliczki zawsze istnieje strategia wygrywająca dla gracza A!

Zauważmy, że każda rozgrywka wymaga nie więcej niż mn posunięć. Niech $N = mn$, jeśli mn jest liczbą parzystą i $N = mn + 1$, jeśli mn jest liczbą nieparzystą. Rozgrywkę będziemy kodować za pomocą ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, gdzie a_i oznacza i-ty ruch, czyli a_1 jest pierwszym ruchem gracza A, a_2 – pierwszym ruchem B, a_3 – drugim ruchem A, itd. Ruch a_i kodujemy za pomocą pary (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Jeśli partia liczy k ruchów i $k < N$, to aby oznaczyć ruch pusty, przyjmujemy $a_i =$ „$*$ ” dla $i > k$. Zbiór dozwolonych, tzn. zgodnych z regułami gry, rozgrywek oznaczmy przez T. Zbiór T składa się więc z pewnych ciągów długości N. Zbiór T możemy przedstawić w postaci sumy rozłącznych zbiorów T_A i T_B, gdzie T_A i T_B składają się z tych rozgrywek, które kończą się zwycięstwem odpowiednio gracza A i gracza B.

Istnienie wygrywającej strategii dla gracza A można zapisać w języku logiki jako

(1) $$\exists a_1\, \forall a_2\, \exists a_3\, \forall a_4\, \ldots \exists a_{N-1}\, \forall a_N\ \ (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in T_A.$$

Pod kwantyfikatorami powinniśmy napisać: „a_i, takie że $a_1, a_2, \ldots, a_i$ przedstawia prawidłowy ciąg posunięć”. Istnienie wygrywającej strategii dla gracza B można zapisać w postaci warunku

(2) $$\forall a_1\, \exists a_2\, \forall a_3\, \ldots \exists a_N\, (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in T_B.$$

Zauważmy, że (2) jest zaprzeczeniem warunku (1). Zatem albo istnieje strategia wygrywająca dla gracza A, albo taką strategię ma gracz B.

Wykażemy, że gracz B nie może mieć strategii wygrywającej.

Załóżmy bowiem przeciwnie, że taką strategię ma. Niech wtedy gracz A w pierwszym ruchu wybierze skrzyżowanie $(1, 1)$. Wówczas gracz B, zgodnie z założeniem, zna „genialną” odpowiedź, prowadzącą go do zwycięstwa. Powiedzmy, że ten mistrzowski ruch polega na wybraniu skrzyżowania (a, b). Zauważmy jednak, że gdyby w pierwszym posunięciu gracz A wykonał właśnie ruch (a, b) zamiast $(1, 1)$, to postawiłby gracza B w tej samej sytuacji, w której on sam teraz nieopatrznie się znalazł! Gracz A miałby więc taki ruch, po jakim B na pewno nie znajdzie „genialnego” posunięcia. To przeczy naszemu przypuszczeniu.

Dowiedliśmy więc, że gracz A ma strategię wygrywającą, choć nie mamy pojęcia, jak ona wygląda!

Autor pragnie podziękować panu Waldemarowi Pompe za udzielenie cennych informacji na temat tego problemu.