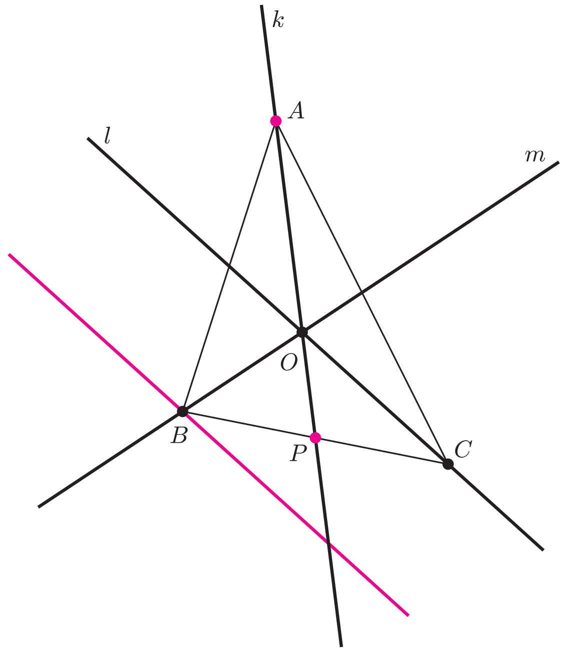
mała delta

Czy taki trójkąt istnieje ?

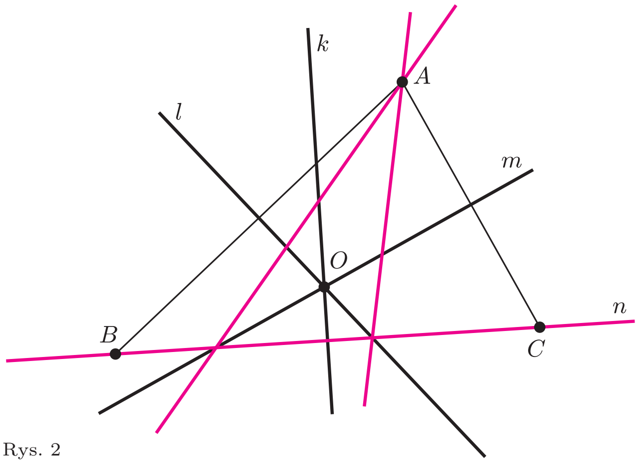
Dane są trzy proste k, l i m przechodzące przez jeden punkt O. To będzie motyw przewodni naszej zabawy.

Czy istnieje trójkąt, którego środkowe zawarte są w tych trzech prostych?

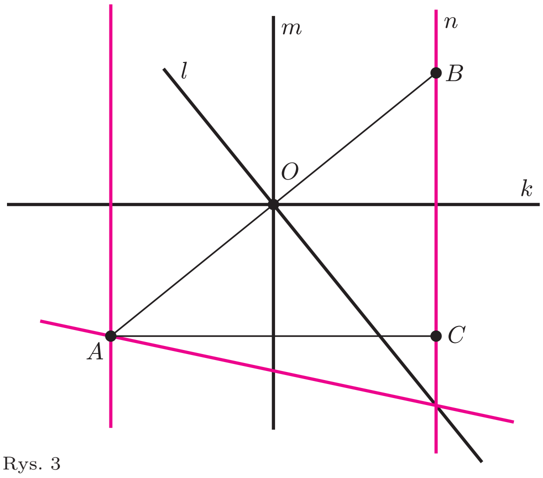
Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć (rys. 1). Na jednej z prostych, powiedzmy k, obieramy jakiś punkt P (byle nie punkt przecięcia wszystkich prostych). Następnie odbijamy symetrycznie l względem P i znajdujemy przecięcie otrzymanej prostej z m – oznaczamy je B. Obraz symetryczny B względem P nazywamy C. Wreszcie po przeciwnej stronie O niż P odkładamy odcinek $2 \cdot OP$ – jego nienazwany koniec nazywamy A. I pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie, że środkowe trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m.



Rys. 1



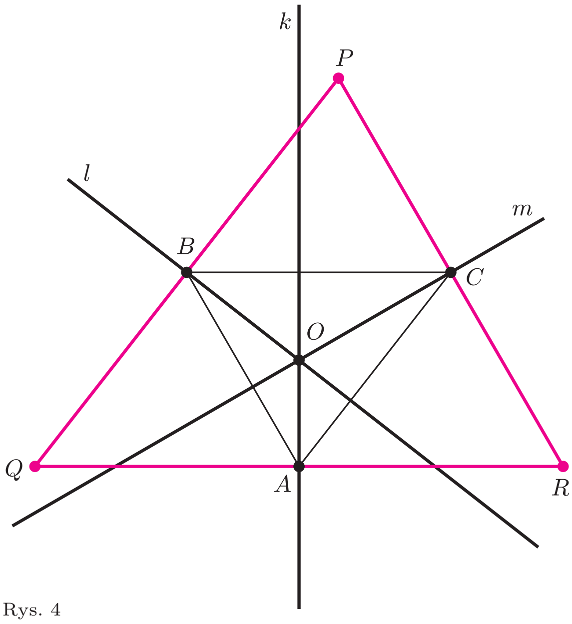
Rys. 2



Rys. 3

Czy istnieje trójkąt, którego symetralne boków zawarte są w tych trzech prostych?

Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć. Prowadzimy prostą n prostopadłą do jednej z prostych k, l, m – przeważnie może to być dowolna z nich, gdy jednak dwie są prostopadłe, wybrać należy jedną z nich (rys. 2, rys. 3). Niech tą prostą będzie k. Następnie odbijamy symetrycznie n względem l i względem m – przecięcie ich obrazów nazwijmy A. Jego obrazy symetryczne względem l i m (leżące na n – prawda?) oznaczamy B i C. A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że symetralne boków trójkąta ABC to właśnie proste k, l i m, oraz wyjaśnienie, po co były te fanaberie z prostopadłością.



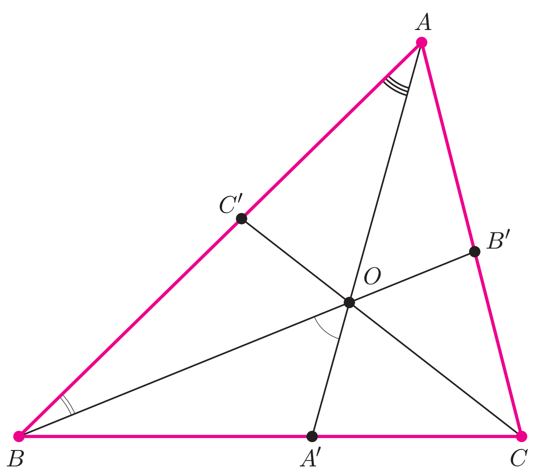
Rys. 4

Czy istnieje trójkąt, którego dwusieczne kątów zawarte są w tych trzech prostych?

To zależy od dobrej woli rozwiązującego to zadanie. A oto jak przedstawia się ta – raczej niecodzienna w matematyce – sytuacja.

Najpierw podam, jak znaleźć taki trójkąt (rys. 5). Na prostej k obieramy jakiś punkt A (byle nie O) i odbijamy go symetrycznie względem l i m. Następnie punkty przecięcia prostej łączącej obrazy punktu A z prostymi l i m nazywamy B i C. A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że dwusieczne kątów trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m.

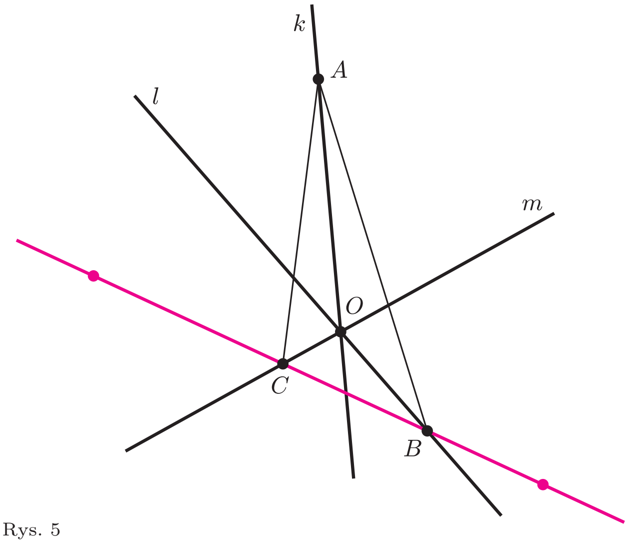
Czytelnik oczywiście bez trudu znajduje to uzasadnienie i wtedy patrzy na kolejny rysunek, na którym sytuacja jest jakby trochę inna (rys. 6). Po chwili jednak odkrywa, że tym razem proste l, m są – co prawda – dwusiecznymi, ale kątów zewnętrznych znalezionego trójkąta. I musi tak być, albowiem…



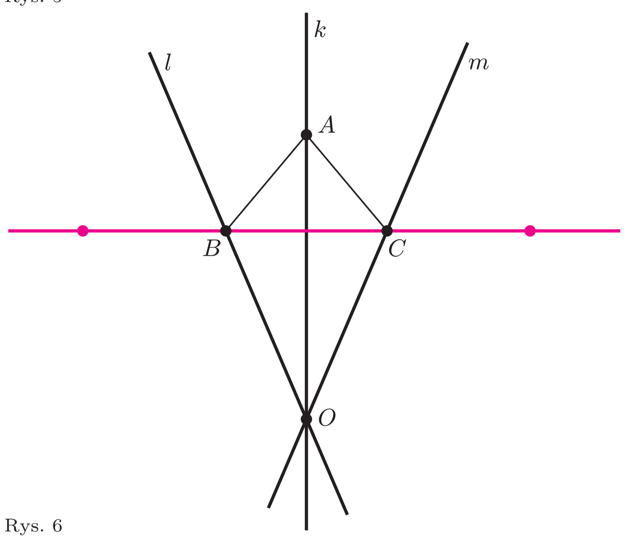
Rys. 7

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości zawarte są w tych trzech prostych?

Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć (rys. 4). Rysujemy trójkąt PQR, dla którego proste te są symetralnymi boków. Środki boków tego trójkąta nazywamy A, B i C. A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że wysokości trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m.



Rys. 5



Rys. 6

Dwusieczne wewnętrznych kątów trójkąta dzielą płaszczyznę na same kąty ostre.

I tego już dowiodę sam (bo łatwe). Oznaczmy przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC z przeciwległymi bokami przez A', B' i C' (rys. 7). Gdyby np. kąt BOA' był prosty lub rozwarty, to suma kątów OAB i OBA byłaby co najmniej równa 90°. Zatem suma kątów CAB i CBA, jako dwa razy większa, byłaby co najmniej równa 180°. A tymczasem kąty te dopiero z kątem ACB dają 180°. Sprzeczność, która dowodzi, że przypuszczenie, iż kąt między dwusiecznymi nie jest ostry, okazuje się fałszywe.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS