Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2002

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 443, 444

Redaguje Marcin E. KUCZMA

443. Rozważamy alfabet złożony z trzech znaków: 0, 1, 2. Niech a_n będzie liczbą słów długości n, w których nie występuje blok 11 ani 22. Niech b_n będzie liczbą słów długości n, w których nie występuje blok trójelementowy złożony z trzech różnych znaków. Wykazać, że $3a_n = b_{n+1}$.

444. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Prosta EF przecina okrąg opisany na trójkącie AEB w punktach E i P, a okrąg opisany na trójkącie AFC w punktach F i Q. Udowodnić, że punkt A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PDQ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC.

Zadanie 444 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kęt.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2002

Przypominamy treść zadań:

435. Rozważamy słowa binarne dowolnej długości skończonej. Słowo powstałe przez napisanie pod rząd trzech identycznych kopii dowolnego słowa binarnego będziemy nazywać *trójniakiem*. Określamy operacje dopuszczalne. Każda taka operacja polega na rozerwaniu słowa w dowolnym miejscu i wstawieniu w powstałą lukę dowolnego trójniaka (także dopisanie trójniaka na początku lub na końcu słowa), bądź też na wykreśleniu dowolnego fragmentu będącego trójniakiem. Startujemy od słowa 01 i wykonujemy ciąg operacji dopuszczalnych. Czy jest możliwe uzyskanie słowa 10?

436. Znaleźć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(2x) = f(x) + xf'(2x) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

435. Przyporządkujmy słowu $W = c_1c_2\ldots c_n$ ($c_j \in \{0, 1\}$) liczbę

$$s(W) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + nc_n = \sum_{j=1}^{n} jc_j.$$

Weźmy pod uwagę słowo W' powstałe z W przez wstawienie pomiędzy znaki c_k i c_{k+1} dowolnego trójniaka TTT, $T = t_1t_2\ldots t_m$:

$$W' = c_1\ldots c_kt_1\ldots t_mt_1\ldots t_mt_1\ldots t_mc_{k+1}\ldots c_n.$$

Spójrzmy, jak zmienia się wartość $s(W)$:

$$s(W') = \sum_{j=1}^{k} jc_j + \sum_{i=1}^{m}(k+i)t_i + \sum_{i=1}^{m}(k+m+i)t_i + \\ + \sum_{i=1}^{m}(k+2m+i)t_i + \sum_{j=k+1}^{n}(3m+j)c_j = \\ = s(W) + \sum_{i=1}^{m}(3k+3m+3i)t_i + \sum_{j=k+1}^{n} 3mc_j.$$

Tak więc $s(W') \equiv s(W) \pmod 3$. To znaczy, że reszta z dzielenia $s(W)$ przez 3 jest niezmiennikiem operacji dopuszczalnych. Ponieważ $s(01) = 2$, $s(10) = 1$, nie jest możliwe przejście od słowa 01 do słowa 10.

436. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Dla liczb $x \neq 0$ zachodzi równość

$$f'(2x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x} \tag{1}$$

która pokazuje, że funkcja f' jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jest też ciągła w punkcie 0, bowiem we wzorze (1) można przejść do granicy ($x \to 0$) w sposób następujący:

$$f'(2x) = 2 \cdot \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \longrightarrow \\ \longrightarrow 2f'(0) - f'(0) = f'(0).$$

Zatem f' jest funkcją ciągłą w całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Ustalmy dowolną liczbę $x_0 > 0$. Niech A będzie zbiorem tych liczb $x \geq 0$, dla których $f'(x) = f'(x_0)$. Wobec ciągłości funkcji f' jest to zbiór domknięty; jest więc w nim liczba najmniejsza α. Przypuśćmy, że $\alpha > 0$. W myśl twierdzenia Lagrange'a istnieje w przedziale $(\frac{1}{2}\alpha; \alpha)$ liczba ξ spełniająca równość

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\frac{1}{2}\alpha)}{\alpha - \frac{1}{2}\alpha} = \frac{f(\alpha) - f(\frac{1}{2}\alpha)}{\frac{1}{2}\alpha}.$$

Otrzymany iloraz jest równy $f'(\alpha)$, zgodnie ze wzorem (1). Tak więc $f'(\xi) = f'(\alpha) = f'(x_0)$, czyli $\xi \in A$, wbrew temu, że α jest najmniejszą liczbą w zbiorze A. Sprzeczność dowodzi, że $\alpha = 0$, i wobec tego $f'(0) = f'(x_0)$.

Ta równość zachodzi dla każdej liczby $x_0 > 0$. To znaczy, że funkcja f' jest stała na przedziale $\langle 0; \infty)$. Analogicznie wykazujemy, że jest stała w przedziale $(-\infty; 0\rangle$. Jest więc stała w zbiorze $\mathbb{R}$, czyli f jest funkcją postaci $f(x) = ax + b$. Nietrudno sprawdzić, że każda funkcja takiej postaci spełnia zadane równanie.

Zadania z fizyki nr 340, 341

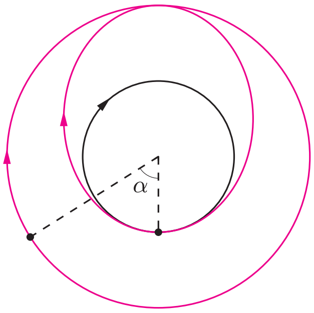
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2002

340. Dwie stacje kosmiczne krążą wokół Ziemi po orbitach kołowych leżących w tej samej płaszczyźnie, przy czym zwrot obiegu orbit jest zgodny, a ich promienie wynoszą odpowiednio R_Z i $2R_Z$, gdzie R_Z jest promieniem Ziemi (oczywiście, w praktyce promień pierwszej orbity musi być nieco większy ze względu na opór powietrza). Aby przenieść się z pierwszej stacji na drugą, kosmonauta wsiada do „taksówki kosmicznej", która odłącza się od pierwszej stacji i rozpędza do prędkości takiej, aby jej orbita sięgnęła orbity drugiej stacji (rys. 1); w chwili zbliżenia do drugiej stacji kolejne włączenie napędu „taksówki" powoduje zrównanie prędkości obu pojazdów. Oba czasy rozpędzania „taksówki" uznajemy za bardzo krótkie w porównaniu z okresem obiegu Ziemi przez którąkolwiek ze stacji.

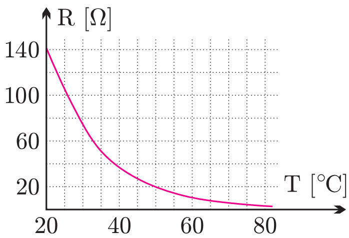
a) Ile powinien wynosić przyrost prędkości „taksówki" przy każdym włączeniu napędu? Dana jest wartość I prędkości kosmicznej v_k (prędkości orbitalnej pierwszej stacji).

b) O jaki kąt α powinna wyprzedzać druga stacja pierwszą w chwili rozpoczęcia podróży „taksówki", czyli przy pierwszym włączeniu silników?

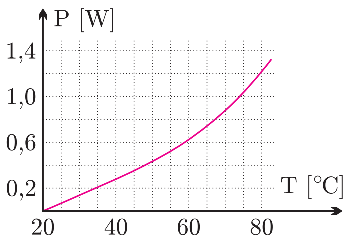


Rys. 1

341. Oporność termistora półprzewodnikowego zależy od temperatury według rysunku 2, a szybkość odpływu ciepła z termistora zależy od temperatury według rysunku 3. Jakie maksymalne napięcie można przyłożyć do termistora, nie powodując przy tym nieograniczonego wzrostu temperatury?



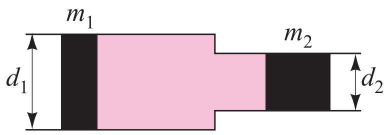
Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2002

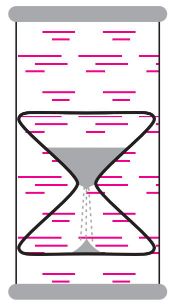
332. Rura składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2, w których mogą się poruszać bez tarcia tłoki o masach m_1 i m_2 (rys. 4). Początkowo drugi tłok był nieruchomy, a pierwszy poruszając się w prawo zaczął sprężać gaz. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby w pewnej chwili drugi tłok osiągnął energię kinetyczną równą początkowej energii pierwszego? Założyć, że przemiana gazu jest odwracalna.



Rys. 4

Przypominamy treść zadań:

333. Na rysunku 5 przedstawiony jest schemat pewnej zabawki fizycznej. Wewnątrz cylindra wypełnionego przezroczystą cieczą pływa szklana klepsydra z piaskiem. Początkowo klepsydra jest przy górnym końcu cylindra; zatem po jego obróceniu znajdzie się na dole i pozostaje tam, podczas gdy piasek w niej się przesypuje. Dopiero, gdy przesypie się około połowy piasku, klepsydra zaczyna powoli wypływać w górę. Dlaczego klepsydra początkowo pozostaje na dole i dlaczego zaczyna wypływać?



Rys. 5

332. Ruch tłoków podlega równaniom
$$m_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -pS_1, \quad m_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = pS_2,$$
gdzie p jest nadwyżką ciśnienia gazu nad ciśnieniem zewnętrznym, a S_1 i S_2 – powierzchniami tłoków. Widzimy, że wielkość
$$\frac{m_1v_1}{S_1} + \frac{m_2v_2}{S_2}$$
pozostaje stała w czasie ruchu tłoków, a stąd
$$\frac{m_1v_1}{S_1} = \frac{m_1v_1'}{S_1} + \frac{m_1v_2'}{S_2},$$
gdzie primy odpowiadają chwili, w której nastąpiło rozprężenie gazu, czyli ponowne wyrównanie ciśnienia z ciśnieniem zewnętrznym. Zgodnie z zasadą zachowania energii energia kinetyczna tłoków jest wtedy równa energii początkowej:
$$m_1v_1^2 = m_1{v_1'}^2 + m_2{v_2'}^2.$$

Drugi tłok osiągnie maksymalną energię kinetyczną, jeśli $v_1' = 0$. Jak nietrudno sprawdzić, warunek ten jest równoważny następującemu:
$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4.$$
(Inspiracją do opracowania tego zadania był opis tzw. działa gazowego, użytego przy wytwarzaniu metalicznego wodoru – zob. *Świat Nauki*, sierpień 2000 r.)

333. Gdy większość piasku jest w górnej komorze klepsydry, jej pozycja w cieczy jest niestabilna i gdyby pływała w niej swobodnie, to by się odwróciła o 180°. Stąd wynika pewien nacisk klepsydry na ścianki cylindra (np. górnej jej części w lewo, a dolnej w prawo), a wynikająca stąd siła tarcia przyczynia się do utrzymania klepsydry przy dnie. (Takie wyjaśnienie nasunęło się autorowi; być może Czytelnicy znajdą inne, równie logiczne.)