6/02 (54)

$\Gamma$limatias $_{n\to\infty}$

## O RÓWNYCH SUMACH SZÓSTYCH POTĘG

Rozwiązania równania

(6.3.3) $\qquad a^6+b^6+c^6=d^6+e^6+f^6,$

czyli równe sumy trzech szóstych potęg znajdujemy bez trudu. W liczbach poniżej 100 mamy pięć istotnie różnych rozwiązań:

$$\begin{aligned}23^6+15^6+10^6&=22^6+19^6+3^6,\\ 67^6+37^6+36^6&=65^6+52^6+15^6,\\ 74^6+47^6+33^6&=73^6+54^6+23^6,\\ 81^6+43^6+32^6&=80^6+55^6+3^6,\\ 81^6+50^6+37^6&=78^6+65^6+11^6.\end{aligned}$$

Wszystkie powyższe rozwiązania spełniają jednocześnie równanie

(2.3.3) $\qquad a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2.$

Spośród 60 rozwiązań równania (6.3.3) w liczbach mniejszych od 1000 aż 46 spełnia równanie (2.3.3). Najmniejszym rozwiązaniem równania (6.3.3), które nie spełnia równania (2.3.3), jest

$$138^6+62^6+25^6=135^6+92^6+82^6.$$

Równanie (6.3.3) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych w liczbach całkowitych dodatnich, gdyż znane są rozwiązania parametryczne tego równania. Z rozwiązań

$$\begin{aligned}303^6+185^6+124^6&=300^6+211^6+83^6,\\ 300^6+211^6+125^6&=289^6+249^6+68^6\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}303^6+185^6+125^6+124^6&=300^6+211^6+125^6+83^6=\\ &=289^6+249^6+83^6+68^6,\end{aligned}$$

co pozostaje prawdą po zmianie wykładnika 6 na 2. Odnotujmy również

$30^n+25^n+16^n+7^n=29^n+27^n+14^n+8^n$ dla $n=1,2,6,$

$25^n+21^n+16^n+2^n=24^n+23^n+14^n+5^n$ dla $n=2,4,6,$

$82^n+63^n+61^n+15^n+9^n=81^n+69^n+55^n+18^n+7^n$ dla $n=1,2,3,6,$

$17^n+14^n+12^n+5^n+4^n=16^n+16^n+10^n+7^n+3^n$ dla $n=1,2,4,6,$

$70^n+64^n+47^n+24^n+23^n+11^n=$
$=68^n+67^n+44^n+31^n+15^n+14^n$ dla $n=1,2,3,4,6,$

$84^n+70^n+68^n+39^n+30^n+11^n+1^n=$
$=81^n+79^n+56^n+50^n+19^n+18^n$ dla $n=1,2,3,4,5,6.$

Nie jest znany rozkład szóstej potęgi na sumę sześciu szóstych potęg, mamy jednak

(6.1.7) $1141^6=1077^6+894^6+702^6+474^6+402^6+234^6+74^6.$

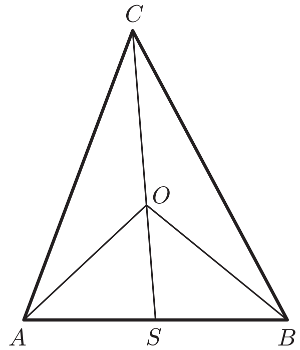
Warto przytoczyć też

(6.2.5) $\quad 1117^6+770^6=1092^6+861^6+602^6+212^6+84^6.$

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (30)

**Zadanie**: W trójkącie $ABC$ środek okręgu opisanego, wierzchołek $C$ oraz środek boku $AB$ leżą na jednej prostej. Dowieść, że trójkąt $ABC$ jest równoramienny.

*Rozwiązanie:* Niech $O$ będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, a $S$ środkiem boku $AB$ (zob. rysunek). Wówczas $AO=BO$, czyli trójkąt $ABO$ jest równoramienny i jego środkowa $OS$ jest zarazem jego wysokością. Skoro prosta $OS$ jest prostopadła do boku $AB$, to także środkowa $CS$ trójkąta $ABC$ jest jego wysokością, skąd $AC=BC$.




## DWIE HIPOTEZY (1)

**Hipoteza**: Wśród dowolnych 65000 kolejnych liczb naturalnych liczby pierwsze stanowią mniej niż 10%.

*Argumenty na poparcie hipotezy:*

Doświadczenie uczy, że liczby pierwsze najgęściej upakowane są na samym początku. Dokładniej, można uwierzyć, że wśród kolejnych $N$ liczb naturalnych nie może być więcej liczb pierwszych niż wśród liczb od 2 do $N+1$.

Dwie liczby pierwsze możemy znaleźć wśród dwóch kolejnych liczb: 2 i 3. Nigdzie dalej w ciągu liczb pierwszych nie jest tak dobrze – w najlepszym razie znajdujemy dwie liczby pierwsze wśród trzech kolejnych liczb naturalnych (liczby pierwsze bliźniacze).

Trzy liczby pierwsze znajdujemy wśród czterech kolejnych liczb: $2,3,4,5$. Potem wśród pięciu: $3,4,5,6,7$. Nigdzie dalej wśród sześciu kolejnych liczb nie znajdziemy trzech liczb pierwszych, trzeba wziąć siedem kolejnych liczb, aby mieć nadzieję na to, że trzy z nich są pierwsze.

Wśród 30 kolejnych liczb $2,3,\ldots,31$ jest aż 11 liczb pierwszych. Wśród 30 kolejnych liczb, z których najmniejsza jest większa od 5, aż 22 są podzielne przez 2, 3 lub 5, może być więc co najwyżej 8 liczb pierwszych – np. liczby pierwsze $1277,1279,1283,1289,1291,1297,1301,1303$ mieszczą się wśród 30 kolejnych liczb.

Jeśli więc wierzyć w powyższe argumenty, należy przyjąć, że wśród dowolnych 65000 kolejnych liczb naturalnych jest nie więcej liczb pierwszych niż wśród liczb $2,3,4,\ldots,65001$. A tu liczb pierwszych jest dokładnie 6493, czyli mniej niż 10%.

Korespondencję do $\Gamma$-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl