Dowodzenie nierówności

Hojoo LEE; Seul, Korea

W tym artykule zobaczymy kilka typowych metod podejścia do zadań olimpijskich, dotyczących nierówności. Często występują w nich pewne dodatkowe warunki, takie jak
$ab=1$,
$xyz=1$,
$x+y+z=1$, itp.
Włączenie tych ograniczeń do nierówności pozwala niekiedy uprościć problem. Zacznijmy od następującego przykładu.

Zadanie 1 (Węgry 1996). Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że $a+b=1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z warunku $a+b=1$, możemy sprowadzić naszą nierówność do postaci jednorodnej:

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))} + \frac{b^2}{(a+b)(b+(a+b))}$$

lub

$$(a+b)(2a+b)(2b+a) \le 3(a^2(a+2b)+b^2(2a+b)),$$

co po przekształceniach daje nierówność

$$2(a^3+b^3)+7(a^2b+ab^2) \le 3(a^3+b^3)+6(a^2b+ab^2).$$

Mamy więc udowodnić

$$a^2b+a\,b^2 \le a^3+b^3,$$

a to wynika z nierówności

$$(a^3+b^3)-(a^2b+a\,b^2) = (a-b)^2(a+b) \ge 0.$$

Nierówność $a^2b+a\,b^2 \le a^3+b^3$ można uogólnić.

Twierdzenie 1. Niech a_1, a_2, b_1, b_2 będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki

$$a_1+a_2=b_1+b_2 \quad \text{i} \quad \max(a_1,a_2) \ge \max(b_1,b_2).$$

Jeśli x i y są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1} \ge x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}.$$

Dowód. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $a_1 \ge a_2, b_1 \ge b_2, a_1 \ge b_1$. Jeśli x lub y jest zerem, nierówność jest oczywiście spełniona. Przyjmijmy zatem, że obie liczby, x i y, są różne od zera. Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} &x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1} = \\ &= x^{a_2}y^{a_2}(x^{a_1-a_2}+y^{a_1-a_2}-x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2}- \\ &\qquad -x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}) = \\ &= x^{a_2}y^{a_2}(x^{b_1-a_2}-y^{b_1-a_2})(x^{b_2-a_2}-y^{b_2-a_2}) = \\ &= \frac{1}{x^{a_2}y^{a_2}}(x^{b_1}-y^{b_1})(x^{b_2}-y^{b_2}) \ge 0. \end{aligned}$$

Zanim zajmiemy się przykładem nierówności z trzema zmiennymi, wprowadźmy dwa zapisy sumacyjne

$$\sum_{\text{cykl}} \text{ i } \sum_{\text{sym}}.$$

Niech $P(x,y,z)$ będzie funkcją trzech zmiennych $x,\ y,\ z$. Definiujemy:

$$\sum_{\text{cykl}} P(x,y,z) = P(x,y,z)+P(y,z,x)+P(z,x,y),$$

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} P(x,y,z) = P(x,y,z)+P(x,z,y)+P(y,x,z)+ \\ +P(y,z,x)+P(z,x,y)+P(z,y,x).\end{aligned}$$

Na przykład,

$$\sum_{\text{cykl}} x^3y = x^3y+y^3z+z^3x,$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3 = 2(x^3+y^3+z^3),$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y,$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz.$$

Zadanie 2 (Międz. Olimp. Matem. 1984). Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, takimi że $x+y+z=1$. Wykazać, że

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Rozwiązanie. Dzięki warunkowi $x+y+z=1$ możemy sprowadzić nierówność z zadania do postaci jednorodnej, tzn.

$$0 \le (xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

Nierówność po lewej stronie jest trywialna, ponieważ jest równoważna warunkom

$$0 \le xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y \quad \text{i} \quad x,y,z \ge 0.$$

Prawa nierówność upraszcza się do postaci

$$7\sum_{\text{cykl}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} &7\sum_{\text{cykl}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y = \\ &\quad = 2\sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y + 5\Big(3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\Big), \end{aligned}$$

więc wystarczy wykazać, że

$$2\sum_{\text{cykl}} x^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^2y \quad \text{i} \quad 3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Zauważmy, że

$$2\sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y = \sum_{\text{cykl}}(x^3+y^3) - \sum_{\text{cykl}}(x^2y+xy^2) =$$
$$= \sum_{\text{cykl}}(x^3+y^3-x^2y-xy^2) \geq 0.$$

Drugą nierówność możemy zapisać tak:

$$\sum_{\text{cykl}} x(x-y)(x-z) \geq 0,$$

a to jest szczególny przypadek następującej nierówności Schura.

Twierdzenie 2 (Schur). Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej r

$$\sum_{\text{cykl}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0.$$

Dowód. Żadna permutacja trzech zmiennych nie narusza tej nierówności, więc możemy założyć, że $x \geq y \geq z$ i przekształcić nierówność do następującej postaci:

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0,$$

w której każdy wyraz po lewej stronie jest oczywiście nieujemny.

Nierzadko przydaje się następujący szczególny przypadek nierówności Schura:

$$\sum_{\text{cykl}} x(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow 3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Oto inne zadanie z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, które można rozwiązać za pomocą tej nierówności.

Zadanie 3 (Międz. Olimp. Matem. 2000). Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi że $abc = 1$. Udowodnić nierówność

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Rozwiązanie. Nierówność z zadania jest równoważna następującej nierówności jednorodnej

$$\left(a - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{b}\right) \cdot \left(b - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{c}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(c - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{a}\right) \leq abc.$$

Podstawiamy: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$, otrzymując

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right) \cdot \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leq x^3y^3z^3.$$

To można uprościć do postaci następującej

$$(x^2y - y^2z + z^2x) \cdot (y^2z - z^2x + x^2y) \cdot$$
$$\cdot (z^2x - x^2y + y^2z) \leq x^3y^3z^3$$

lub

$$3x^3y^3z^3 + \sum_{\text{cykl}} x^6y^3 \geq \sum_{\text{cykl}} x^4y^4z + \sum_{\text{cykl}} x^5y^2z^2,$$

lub

$$3(x^2y)(y^2z)(z^2x) + \sum_{\text{cykl}} (x^2y)^3 \geq \sum_{\text{sym}} (x^2y)^2(y^2z),$$

co już jest szczególnym przypadkiem nierówności Schura.

Z kolei przykład nierówności z dodatkowym warunkiem $abc = 1$.

Zadanie 4 (Turniej Miast 1997). Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Rozwiązanie. Nierówność możemy przedstawić w następującej postaci

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}} +$$
$$+ \frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}} \leq \frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Podstawiamy: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$, i dochodzimy do nierówności

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

równoważnej następującej

$$xyz \sum_{\text{cykl}} (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz) \leq$$
$$\leq (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)(z^3+x^3+xyz).$$

Z tej otrzymujemy nierówność

$$\sum_{\text{sym}} x^6y^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^5y^2z^2,$$

która jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 3 (R.F. Muirhead). Jeśli a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 są liczbami rzeczywistymi, takimi że
$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$,
$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$,
$a_1 \geq b_1$,
$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$,
$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$,
oraz x, y, z są liczbami nieujemnymi, to

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Dowód. Przypadek 1. $b_1 \geq a_2$:
Z nierówności
$$a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1 \text{ i } a_1 \geq b_1$$
wynika, że
$$a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1),$$
a więc
$$\max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1).$$
Z kolei z
$$a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$$
i
$$a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$$
wnioskujemy, że
$$\max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3).$$
Stosując teraz dwukrotnie twierdzenie 1, mamy
$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} = \sum_{\text{cykl}} z^{a_3}(x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1}) \geq$$
$$\geq \sum_{\text{cykl}} z^{a_3}(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}) =$$
$$= \sum_{\text{cykl}} x^{b_1}(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}) \geq$$
$$\geq \sum_{\text{cykl}} x^{b_1}(y^{b_2}z^{b_3} + y^{b_3}z^{b_2}) = \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$
Przypadek 2. $b_1 \leq a_2$:
Z nierówności
$$3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$$
otrzymujemy
$$b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$
oraz
$$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1,$$
a w konsekwencji
$$\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$$
i
$$\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_1, b_3).$$
Stosując ponownie dwa razy twierdzenie 1, dochodzimy do nierówności
$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} = \sum_{\text{cykl}} x^{a_1}(y^{a_2}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_2}) \geq$$
$$\geq \sum_{\text{cykl}} x^{a_1}(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}) =$$
$$= \sum_{\text{cykl}} y^{b_1}(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}) \geq$$
$$\geq \sum_{\text{cykl}} y^{b_1}(x^{b_2}z^{b_3} + x^{b_3}z^{b_2}) = \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\ .$$
Ostatnie twierdzenie można także wykorzystać do rozwiązania następującego zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 5 (Międz. Olimp. Matem. 1995).
Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi że $abc = 1$. Udowodnić, że
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$
Rozwiązanie. Równoważnie, mamy udowodnić nierówność
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$
Przyjmijmy $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$. Wówczas nierówność przybiera postać
$$\sum_{\text{cykl}} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$
Likwidując mianowniki, dochodzimy do postaci następującej:
$$\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} + 2\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 + \sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 \geq$$
$$\geq 3\sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 + 6x^8y^8z^8$$
lub
$$\Big(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\Big) +$$
$$+2\Big(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\Big) +$$
$$+\Big(\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8\Big) \geq 0,$$
gdzie na mocy twierdzenia 3 każdy wyraz po lewej stronie jest nieujemny.

ZADANIA

1. (Międz. Olimp. Azji i Pacyfiku 1998) Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Udowodnić, że
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$
2. (Jugosławia 1987) Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Udowodnić, że
$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$
3. (Międz. Olimp. Matem. 1998, propozycja) Udowodnić, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz = 1$, to
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$
4. (Wielka Brytania 1999) Liczby rzeczywiste nieujemne p, q, r spełniają warunek $p + q + r = 1$. Udowodnić, że
$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr.$$