Pomysł Gödla

Rozwój matematyki w XIX wieku, pojawienie się nowych teorii aksjomatycznych i lepsze zrozumienie istoty aksjomatyzacji, które zawdzięczano m.in. pracom nad geometriami innymi niż euklidesowa, rozbudziły nowe nadzieje. W latach 1910–1913 Bertrand Russell i Alfred N. Whitehead opublikowali trzy tomy dzieła *Principia Mathematica*, stanowiącego próbę zbudowania matematyki na fundamencie niedużego zbioru aksjomatów i reguł wnioskowania. Nadzieja Davida Hilberta, by całą matematykę przedstawić w postaci niesprzecznej teorii sformalizowanej, w której dla każdego dającego się zapisać w języku tej teorii zdania p istniałby albo dowód p, albo dowód zdania *nieprawda, że* p – dowód korzystający z wyraźnie określonych reguł wnioskowania z równie jasno określonych aksjomatów – wydawała się bliska realizacji.

Teoria jest *niesprzeczna*, gdy wśród jej twierdzeń, a więc zdań mających dowód, nie ma dwóch zdań wzajemnie sprzecznych. Równoważnie, gdy istnieje zdanie, które nie ma dowodu w tej teorii.

Rozważmy zdanie p następującej treści: „zdanie p jest fałszywe”. Czy to zdanie, nieco uściślona wersja tzw. paradoksu kłamcy, jest prawdziwe czy fałszywe? Bez trudu sprawdzisz, drogi Czytelniku, że każda odpowiedź prowadzi do sprzeczności. Mamy więc zdanie, którego prawdziwości nie można ustalić na gruncie, nazwijmy to, zwykłej logiki. Pomysł Kurta Gödla polegał na tym, by ten paradoks przekształcić w zdanie sformułowane w języku arytmetyki liczb naturalnych (tzw. arytmetyki Peano, od nazwiska twórcy aksjomatycznych podstaw tej teorii) i wykazanie, że ani otrzymane zdanie, ani jego zaprzeczenie dowodu w arytmetyce Peano nie mają. Teorię, dla której takie zdanie istnieje, nazywa się teorią niezupełną.

Pomińmy tu trudności matematyczne i logiczne rozumowania Gödla, zatrzymajmy się na kwestii, wydawałoby się, drugorzędnej, ale która dla całej sprawy jest kluczowa i to rozumowanie umożliwia. Zdanie p – albo podobne zdanie p', które głosiłoby, że p' nie ma dowodu – orzeka coś o zdaniach (wręcz samo o sobie), podczas gdy zdania arytmetyki wyrażają własności liczb naturalnych. Kluczem do twierdzenia o niezupełności arytmetyki stał się pomysł kodowania symboli języka teorii, jej formuł (czyli pewnych ciągów symboli), a także dowodów (czyli pewnych ciągów formuł) za pomocą liczb naturalnych. W ten sposób każda relacja między formułami (np. stwierdzenie, że ciąg formuł Φ jest dowodem formuły φ) staje się relacją między liczbami naturalnymi.

Gödel użył następujących symboli: „0” (reprezentujący liczbę 0), „f” (symbol funkcji następnika), „$\sim$” (negacja), „$\vee$” (alternatywa), ”$\forall$” (kwantyfikator ogólny), „(” (lewy nawias), „)” (prawy nawias). Ich kodami były odpowiednio liczby $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$.

Każdemu symbolowi języka arytmetyki Gödel przypisał liczbę nieparzystą, niewiększą od 13 – każdemu inną. Każdej zmiennej reprezentującej liczby przyporządkował liczbę pierwszą, większą od 13, każdej zmiennej reprezentującej zbiory liczb – kwadrat liczby pierwszej większej od 13, każdej zmiennej reprezentującej zbiory zbiorów (np. relacje dwuargumentowe) – trzecią potęgę liczby pierwszej większej od 13 itd. Formule, będącej ciągiem symboli o numerach $n_1, n_2, \ldots, n_k$, odpowiadała liczba $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, gdzie p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą. Wreszcie kodem dowodu, będącego ciągiem formuł o numerach, kolejno, $m_1, m_2, \ldots, m_r$, stała się liczba $2^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$. Ten sposób kodowania dawał gwarancję jednoznaczności: nie tylko każdy symbol, każda formuła i każdy dowód został opatrzony jednoznacznie określonym numerem, ale z każdej liczby, będącej kodem, można jednoznacznie odczytać obiekt (symbol, formułę, dowód), którą ta liczba koduje. Zdania o formułach mają więc swoje dokładne odpowiedniki w zdaniach o liczbach i odwrotnie; Gödel pokazał, jak takie odpowiedniki budować.

Teraz pozostaje już tylko zapisać w języku arytmetyki formułę $C(x)$, orzekającą, że liczba x jest numerem formuły nie mającej dowodu, i podstawić za x numer formuły $C(x) \ldots$

W. B.