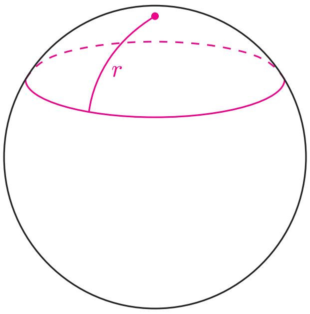
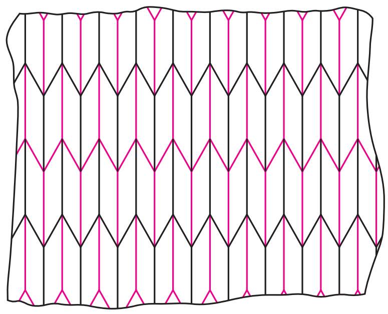
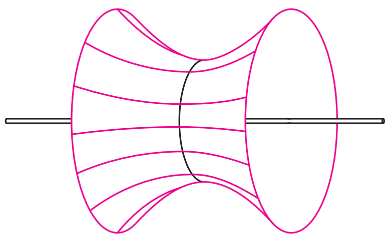
Pomysł Gaussa, Borsuka i Riemanna



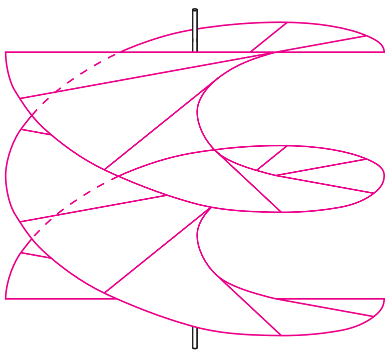


Linie czarne zaginamy do siebie, a kolorowe od siebie.

Katenoida to powierzchnia powstała przez obracanie krzywej łańcuchowej – linii wzdłuż której układa się zawieszony na dwóch gwoździach łańcuch. Inaczej: powierzchnia, jaką utworzy błona mydlana rozpięta na dwóch okręgach leżących w płaszczyznach prostopadłych do prostej łączącej ich środki. Wygląda ona tak:



Helikoida to powierzchnia powstała przez jednostajne obracanie prostej wokół osi i równoczesne jednostajne przesuwanie wzdłuż tej osi. Wygląda ona tak:



Gdy zajmujemy się geometrią na jakiejś powierzchni w zwykłej przestrzeni euklidesowej, to możemy to robić w taki sposób, jakby niczego poza tą powierzchnią nie było. Wystarczy w tym celu umówić się, że odległością dwóch punktów będzie długość najkrótszego łuku łączącego po powierzchni te punkty (i założyć, że taki łuk istnieje – takie powierzchnie nazwano później geometrycznie akceptowalnymi). Uzyskana tym sposobem geometria nazywa się geometrią wewnętrzną i jest to **pomysł Carla Gaussa**.

Spójrzmy z tego punktu widzenia na sferę (czyli powierzchnię kuli) – niech jej promień będzie R. Największa odległość jej punktów w geometrii euklidesowej jest równa $2R$, a w jej geometrii wewnętrznej jest większa: πR. Zmieniają się nawet najprostsze wzory. Okrąg o euklidesowym promieniu r ma długość $2\pi r$, a w geometrii wewnętrznej sfery ma długość mniejszą: $2\pi R \sin\frac{r}{R}$ (czy wszyscy umieją sprawdzić, że jest to długość mniejsza?). Nie wątpię natomiast, że każdy potrafi podać jeszcze cały szereg różnic między geometrią sfery w przestrzeni euklidesowej a geometrią sferyczną (bo tak nazywa się geometria wewnętrzna sfery).

Najciekawszym ze stosunkowo nowych twierdzeń o geometrii wewnętrznej jest **pomysł Karola Borsuka** z 1980 roku (ulepszony w tymże roku przez Juliusza Olędzkiego i Stanisława Spieża), który orzeka, że

przestrzeń euklidesową n-wymiarową można – bez zmiany jej geometrii wewnętrznej – zmieścić w dowolnie małej kulce przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej (przekształcenie zachowujące geometrię wewnętrzną nazywamy izometrią wewnętrzną).

Dowód tego twierdzenia jest dość trudny (w *Delcie* 11/1980 można znaleźć dowód jego słabszej wersji), przykład postępowania, które sprowadza wewnętrznie izometrycznie płaszczyznę do małej kuli w przestrzeni, przedstawiony jest obok, a konsekwencje tego twierdzenia dla UFOlogii każdy może sobie wymyślić sam.

Przykładem powierzchni wewnętrznie izometrycznych są np. odpowiednie fragmenty płaszczyzny, walca i stożka. Bardziej zaskakująca jest wewnętrzna izometria katenoidy i helikoidy. Dla kochających liczyć potrzebne do sprawdzenia dane: katenoida ma przedstawienie parametryczne $(t,\ \cosh t\cos\varphi,\ \cosh t\sin\varphi)$, helikoida $(v\cos w,\ v\sin w,\ w)$, wewnętrzna ich izometria dana jest wzorem $h(x)=\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\sinh x_1, \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}\sinh x_1, \operatorname{arctg}\frac{x_3}{x_2}\right)$; do sprawdzenia jest to, że $h(x)$ nakłada katenoidę na helikoidę i że nie zmienia przy tym długości żadnej krzywej leżącej na katenoidzie.

Wewnętrzna izometryczność dwóch powierzchni oznacza, że mają one identyczną geometrię wewnętrzną, czyli że żyłoby się na nich jednakowo.

Znaczenie pojęcia geometrii wewnętrznej uświadomił matematykom, ale przede wszystkim fizykom i astronomom, **pomysł Bernharda** (używał swojego trzeciego imienia) **Riemanna**. Riemann został mianowicie zobowiązany przez Gaussa do poświęcenia swojego wykładu habilitacyjnego geometrii (którą się nie zajmował – jego specjalnością była analiza). Polegał ten pomysł na tym, że Riemann zauważył, iż geometria wewnętrzna powierzchni nie wymaga wcale istnienia jakiejś przestrzeni, w której ta powierzchnia się znajduje: po prostu zszywamy z kawałków płaszczyzny „coś” (naukowo: rozmaitość) tak, jak zszywa się z łatek np. kożuch, i umawiamy się, jak na tym „czymś” mierzy się długości łuków. Skoro tak, to nie ma powodu ograniczać się do powierzchni, czyli tworów dwuwymiarowych – wymiar może też być dowolny. Tak pomyślana geometria wewnętrzna nazywa się dziś geometrią riemannowską i w takiej postaci (lub niewiele uogólnionej) używają geometrii praktycznie wszyscy przyrodnicy.

Ciekawostką jest tutaj fakt, że pomysł Riemanna został przez wszystkich jego kolegów (w tym i Gaussa) zlekceważony i ponownie odkryto go dopiero po kilkunastu latach (Hermann Helmholtz i Felix Klein).

M. K.