Pomysł Fouriera

Twierdzenie Fouriera. „Każdą” funkcję określoną na przedziale $[-l, l]$ można reprezentować przez szereg sinusów i cosinusów w następujący sposób

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

gdzie współczynniki a_k i b_k są określone wzorami

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\,ds,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds.$$

Kiedy rozpoczęto próby matematycznego opisu drgającej struny, w naturalny sposób pojawiło się pytanie: jakie funkcje określone na pewnym odcinku da się zapisać w postaci nieskończonej sumy sinusów i cosinusów?

Pomysł Jeana Baptiste'a Fouriera polegał na tym, żeby na powyższe pytanie odpowiedzieć: WSZYSTKIE.

Fakt, że powyższe twierdzenie jest ściśle biorąc fałszywe, w niczym nie umniejsza ani wielkości twierdzenia, ani wielkości jego twórcy.

Do wielkości Fouriera wkrótce dojdziemy, teraz natomiast przyjrzyjmy się, jak on sam dowodził swego twierdzenia. Rozpoczął od tego, że zapisał formalnie równość $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(nx)$, która miała być spełniona dla „każdej” funkcji określonej na odcinku $[0,\pi]$ (na takim odcinku wystarczają same sinusy lub cosinusy). Następnie zastąpił sinusy przez ich rozwinięcia w szereg potęgowy $\sin(nx)=(nx)-\frac{(nx)^3}{3!}+\frac{(nx)^5}{5!}-\ldots$, a wreszcie zmieniając kolejność sumowania, przedstawił „dowolną” funkcję w postaci szeregu potęgowego. Obecnie można za coś takiego „wylecieć” z egzaminu z analizy na I roku studiów (nawet funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne mogą nie dać się przedstawić w postaci szeregu potęgowego), jednak Fourier żadnego egzaminu nie zdawał, więc liczył dalej. Doszedł wreszcie do formalnego wzoru na współczynniki b_n:

$$b_n=\frac{\prod_{m=1,m\neq n}^{\infty} m^2}{n\prod_{m=1,m\neq n}^{\infty}(m^2-n^2)}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{n^{2q}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(2q+2k-1)}(0)}{(2k-1)!}\pi^{2k-2}.$$

Warto dostrzec piękno tego wzoru, w którym dzieli się dwa iloczyny rozbieżne do nieskończoności. Fourier nie przejmował się tym „drobiazgiem”, martwiło go natomiast skomplikowanie tego wzoru i doszedł do wniosku, że warto by ten wzór nieco uprościć, co udało mu się rewelacyjnie, gdyż w ostatecznej postaci przybrał on formę

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\sin ns\,ds.$$

Warto przy okazji zauważyć, że ten sam wzór otrzymał wcześniej Euler (o czym Fourier nie wiedział) i to w sposób bardziej elegancki, choć też nie najprostszy (Euler korzystał z tożsamości trygonometrycznych, Fourier z równań różniczkowych zwyczajnych, ale obaj przegapili skorzystanie z prostej własności całek z iloczynu funkcji typu $\cos nx$ i $\cos mx$ oraz $\sin nx$ i $\sin mx$, które znikają na przedziale $(0,\pi)$, gdy n jest różne od m).

Dlaczego zatem uważa się Fouriera za geniusza? Przecież ani nie był pierwszym, który odkrył wzór na współczynniki dziś zwane jego imieniem, ani nie uniknął w swoim „dowodzie” niezbyt ściśle sformułowanego twierdzenia rażących błędów. Większość komentatorów stwierdza, że wartość dokonań Fouriera leży w głębi jego interpretacji. Otóż Fourier spostrzegł, iż formuła na współczynniki rozwinięcia ma sens także dla funkcji bardzo nieregularnych: przecież b_n to po prostu pole pod wykresem pewnej funkcji. Idąc dalej, Fourier wyliczył kilka pierwszych współczynników dla rozmaitych przykładów i stwierdził, że rozwinięcia trygonometryczne rzeczywiście przybliżają nawet bardzo dziwne, nieciągłe funkcje. To utwierdziło go w przekonaniu, że „każda funkcja” ma takie rozwinięcie. Fakt, że matematycy potrzebowali potem 170 lat, by sprecyzować, co znaczy w tym kontekście „każda funkcja” i co to znaczy, że jej szereg Fouriera jest zbieżny, najdobitniej świadczy o głębi myśli Fouriera. Praca Fouriera miała też niesłychaną głębię: okazało się, że pojęcie funkcji ciągłej niezbyt pasuje do szeregów Fouriera, natomiast właściwe dla nich „środowisko” to przestrzenie Hilberta, całka i miara Lebesgue'a, zbieżność prawie wszędzie – a zatem fundamentalne pojęcia współczesnej analizy funkcjonalnej, która w dużej mierze na szeregach Fouriera wyrosła. A „przy okazji” z rozważań nad szeregami Fouriera zrodziła się Cantorowska teoria mnogości...

W. S.

Właściwie zwieńczenie badań nad twierdzeniem Fouriera przyszło dopiero w 1966 r., gdy L. Carleson wykazał, że każda funkcja, która podniesiona do kwadratu ma skończoną całkę (Lebesgue'a) na przedziale $(0,l)$, jest sumą swego szeregu Fouriera w prawie wszystkich punktach odcinka $(0,l)$ (tzn. wszędzie poza zbiorem tak małym, że da się go nakryć przeliczalną rodziną odcinków o dowolnie małej sumarycznej długości).