Rozwiązanie zadania F 571.
Zgodnie z zasadą ekwipartycji energii średnia prędkość kwadratowa cząsteczek deuteru jest o czynnik $1/\sqrt{2}$ mniejsza od średniej prędkości kwadratowej cząsteczek zwykłego wodoru. Oznacza to, że liczba cząsteczek deuteru o dużych prędkościach jest odpowiednio mniejsza i deuter paruje słabiej niż wodór.

Pomysł Cantora

Kiedy funkcja ma jednoznaczną reprezentację w postaci szeregu trygonometrycznego? Problem, bardzo aktualny w drugiej połowie XIX wieku, zainteresował także młodego Georga Cantora. Wiadomo już było, że funkcja nie musi być ciągła, pod warunkiem, że ma skończenie wiele punktów nieciągłości. To nasunęło Cantorowi pierwszy, chciałoby się powiedzieć, wstępny pomysł: przyjrzeć się dziedzinie funkcji i dopuszczalnemu rozkładowi „złych” punktów. Okazało się, że może być ich nieskończenie wiele (bez utraty jednoznaczności przedstawienia w postaci szeregu trygonometrycznego), choć nie dowolnie rozłożonych, a ich struktura – struktura zbioru takich punktów – może być dość skomplikowana. Próba jej opisu doprowadziła do drugiego, zasadniczego pomysłu Cantora.

Jak porównać wielkość dwóch zbiorów? Potrafimy to zrobić bez trudu, gdy oba są skończone: liczymy elementy jednego, liczymy elementy drugiego i porównujemy otrzymane liczby. W ten sposób w gruncie rzeczy porównujemy oba te zbiory z pewnym początkowym fragmentem zbioru liczb naturalnych. Wszak to, że zbiór ma n elementów, oznacza tylko tyle, że można je postawić we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Małe dziecko nie przechodzi przez ten etap: porównuje od razu elementy dwóch zbiorów. Na przykład, wyliczając swoje koleżanki z przedszkola, zagina kolejny paluszek przy każdym następnym imieniu, wskazując w ten sposób na takąż wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem swoich koleżanek i zbiorem swoich paluszków. Cantor spojrzał na zbiory oczami dziecka: taki sposób porównywania zbiorów nadaje się także do zbiorów nieskończonych! I na tym właśnie polega ów zasadniczy pomysł Cantora: uznać, że dwa zbiory A i B są tak samo duże (matematycy mówią: *równoliczne*), gdy istnieje różnowartościowa funkcja ze zbioru A w B, której zbiór wartości pokrywa się z B. Mówimy wtedy, że oba zbiory mają tę samą moc. Czy wynikło z tego coś ciekawego? Okazało się na przykład, że istnieją różne nieskończoności. Moc zbioru wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest mniejsza od mocy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Inaczej mówiąc, żaden ciąg nie może zawierać wszystkich liczb rzeczywistych, a nawet wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$. Każdą liczbę rzeczywistą z tego przedziału można zapisać (jednoznacznie!) w postaci rozwinięcia dziesiętnego, w którym występuje nieskończenie wiele cyfr różnych od 0 (np. 0,1 to także 0,0(9)). Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1)$, a $0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$ rozwinięciem dziesiętnym liczby a_n. Jeśli utworzymy teraz liczbę $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$, tak aby w jej rozwinięciu dziesiętnym b_n była dowolną cyfrą różną od 0 i od a_{nn}, to b będzie liczbą z przedziału $(0, 1)$, zawierającą nieskończenie wiele cyfr różnych od 0 i różną od wszystkich liczb z ciągu (a_n): od każdej z nich różni się bowiem na pewnym miejscu po przecinku. Stąd wniosek: żaden ciąg nie wyczerpuje wszystkich liczb z przedziału $(0, 1)$, a więc tym bardziej nie wyczerpuje zbioru wszystkich liczb rzeczywistych.

Można, na przykład, określić b w taki sposób:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a_{nn} \neq 1, \\ 2 & \text{gdy } a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Okazało się jeszcze, że zbiory, wydawałoby się, tak różnej wielkości, jak zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ i zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mają tę samą moc co zbiór $\mathbb{N}$, mimo że zbiór $\mathbb{Z}$ jest „dziurawy” w $\mathbb{R}$, natomiast między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi można zawsze znaleźć liczbę wymierną, a nawet nieskończenie wiele takich liczb. Okazało się, że przestrzeń $\mathbb{R}^3$, a nawet każda przestrzeń $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, ma tę samą moc co $\mathbb{R}$, a $\mathbb{R}$ jest równoliczny z każdym swoim przedziałem otwartym (np. funkcja tangens przekształca przedział $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ w sposób różnowartościowy na cały zbiór $\mathbb{R}$). Okazało się również, że nie ma największej nieskończoności, bo dla każdego zbioru A można zbudować zbiór o mocy większej niż moc A; takim zbiorem jest, na przykład, zbiór wszystkich podzbiorów A.

W. B.