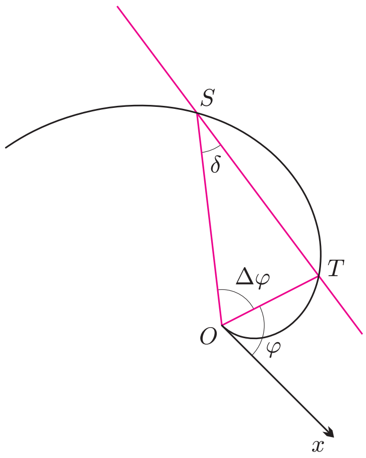
Pomysł Archimedesa

Jak wiadomo (lub nie wiadomo – zależy jak komu), kwadraturę koła można wykonać za pomocą spirali Archimedesa. Spirala Archimedesa to linia, jaką wyznacza mucha wędrująca ruchem jednostajnym prostoliniowym od środka obracającej się na adapterze starej „czarnej” płyty gramofonowej. Można zapisać to za pomocą wzoru $r = a\varphi$, gdzie r to odległość od ustalonego punktu (np. początku układu współrzędnych), a φ to kąt od ustalonej, zaczynającej się w tym punkcie półprostej (np. dodatniej półosi Ox).

Kwadraturę wykonuje się tak. Bierzemy jakąkolwiek spiralę Archimedesa (oznaczmy jej początek przez O) i prowadzimy półprostą odpowiadającą kątowi $\frac{3}{2}\pi$ i styczną w punkcie P spirali odpowiadającym kątowi 2π. Przecięcie tej półprostej z tą styczną oznaczmy przez Q. Trójkąt OPQ ma pole równe polu koła o promieniu OP. Czyli kwadratura została dokonana, a to z tego powodu, że – po pierwsze – z trójkąta zrobić kwadrat to już żadna sztuka, i – po drugie – zrobienie kwadratury jednego koła pozwala (za pomocą podobieństwa) na zrobienie jej dla dowolnego.



Ale dlaczego to jest dobrze? W pracy „O linii spiralnej” Archimedes udowodnił (między innymi) załatwiające tę sprawę twierdzenie (podam je w dzisiejszej terminologii).

W dowolnym punkcie spirali Archimedesa kąt między styczną do spirali w tym punkcie a promieniem wodzącym ma tangens równy kątowi obrotu, któremu ten punkt odpowiada.

A oto dowód. Weźmy na spirali o początku O dwa niezbyt odległe punkty S i T. Niech punktowi T odpowiada kąt obrotu φ i oznaczmy $\sphericalangle TOS = \Delta\varphi$, $\sphericalangle OST = \delta$. Zastosujemy do trójkąta STO twierdzenie sinusów:

$$\frac{\sin\sphericalangle TSO}{TO} = \frac{\sin\sphericalangle STO}{SO}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin\delta}{a\varphi} = \frac{\sin(\pi-\delta-\Delta\varphi)}{a(\varphi+\Delta\varphi)}.$$

I trzeba trochę porachować. Mamy

$$(\varphi+\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin(\delta+\Delta\varphi) = \varphi\sin\delta\cos\Delta\varphi + \varphi\cos\delta\sin\Delta\varphi,$$

zatem

$$(\varphi+\Delta\varphi-\varphi\cos\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin\Delta\varphi\cos\delta$$

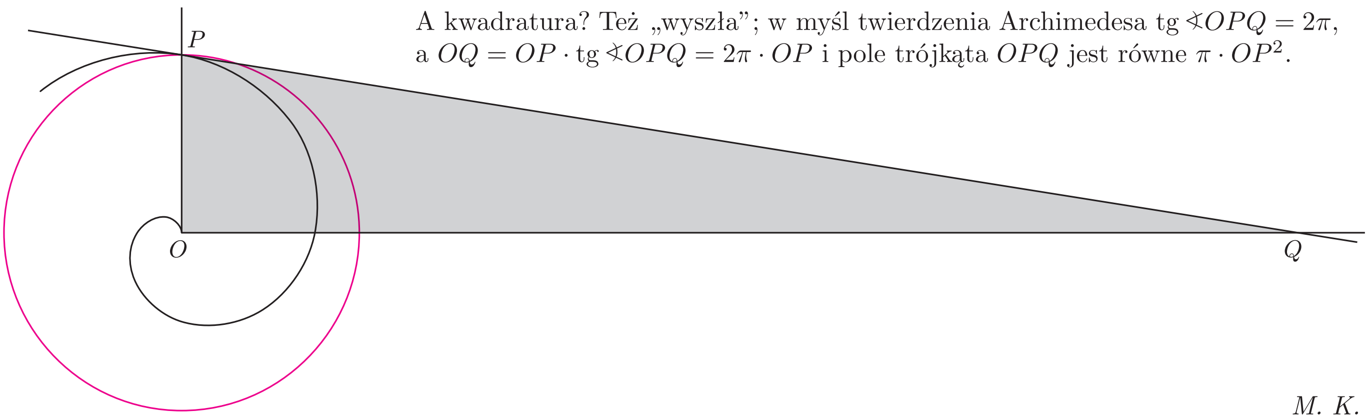
i ostatecznie

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{1}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} - \frac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1-\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Gdy teraz będziemy S przybliżali do T (czyli gdy kąt $\Delta\varphi$ będzie dążył do zera), to – zgodnie z pomysłem przytoczonym w poprzednim numerze *Delty*, a orzekającym, że $\frac{\sin x}{x}$, dla x dążącego do zera, dąży do 1 – pierwszy składnik będzie dążył do $\frac{1}{\varphi}$, drugi do zera, a sieczna ST stanie się styczną. To razem dowodzi twierdzenia Archimedesa.

A kwadratura? Też „wyszła”; w myśl twierdzenia Archimedesa $\operatorname{tg}\sphericalangle OPQ = 2\pi$, a $OQ = OP\cdot\operatorname{tg}\sphericalangle OPQ = 2\pi\cdot OP$ i pole trójkąta OPQ jest równe $\pi\cdot OP^2$.



M. K.