Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2002

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

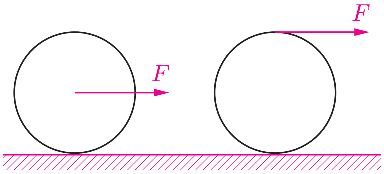
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z fizyki nr 338, 339

Redaguje Jerzy B. BROJAN

338. Na dwa jednorodne i jednakowe walce spoczywające na poziomym stole działają poziome siły, przy czym w jednym z tych przypadków siła jest przyłożona do osi walca, a w drugim – do górnej krawędzi (rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia o stół ma dla obu walców jednakową wartość, to na który walec możemy podziałać większą siłą, nie wprawiając go przy tym w poślizg? Który walec będzie się wtedy toczył z większym przyspieszeniem?



Rys. 1

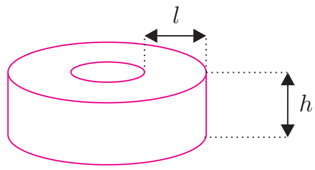
339. Półkula o promieniu 10 cm wykonana ze szkła o współczynniku załamania 1,5 leży na stole płaską stroną do dołu. Nad wierzchołkiem półkuli na wysokości 3 cm znajduje się punktowe źódło światła. Ile wynosi promień oświetlonego koła na powierzchni stołu pod półkulą?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2002

Przypominamy treść zadań:

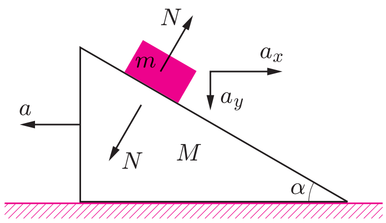
330. Równię pochyłą o masie M i kącie nachylenia α postawiono na poziomym stole, a na równi położono na pewnej ustalonej wysokości h ciało o masie m (rys. 2). Jeśli na żadnej powierzchni nie występuje tarcie, to czy można tak dobrać parametry równi (M i α), aby ciało w chwili zsunięcia się z równi miało dowolnie małą prędkość względem ziemi, czy też istnieje jakieś ograniczenie od dołu na tę prędkość?

331. Aby zmniejszyć natężenie prądów wirowych w rdzeniu transformatorów (czyli zmniejszyć straty energii), rdzenie te wykonuje się z izolowanych blaszek żelaznych zamiast z litej masy żelaza. W przypadku autotransformatora rdzeń ma kształt toroidalny o przekroju prostokątnym (rys. 3). Jaki sposób zestawienia blaszek jest najlepszy:
a) ułożenie w stos płaskich kółek z dziurką,
b) zwinięcie w rulon długiej taśmy o szerokości h,
c) złożenie rdzenia z prostokątnych płytek o wymiarach $l \times h$?



Rys. 3

330. Oznaczmy siłę nacisku ciała na równię jako N, składowe przyspieszenia ciała jako a_x i a_y (zob. rys. 2), a przyspieszenie równi jako a.



Rys. 2

Obowiązują równania dynamiczne
$N \sin\alpha = Ma = ma_x$,
$mg - N\cos\alpha = ma_y$,
oraz kinematyczne równanie wynikające z faktu, że ciało pozostaje na powierzchni równi: $a_y = (a_x + a)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Z równań tych eliminujemy N i wyznaczamy przyspieszenia; w szczególności

$$a_x = \frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad a_y = \frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Mnożąc a_x i a_y przez czas t obliczymy składowe końcowej prędkości ciała; z drugiej strony, czas ten jest dany wzorem

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}}.$$

Kwadrat końcowej prędkości ciała jest więc opisany wyrażeniem

$$v^2 = (a_x^2 + a_y^2)t^2 = 2gh\frac{M^2\cos^2\alpha + (M+m)^2\sin^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dobierając odpowiednio małe M i α można dowolnie zmniejszyć v^2. Trzeba przy tym zauważyć, że istotna jest kolejność dokonania przejść granicznych $M \to 0$ i $\alpha \to 0$ (najpierw należy przejść do granicy z $\alpha \to 0$; w praktyce wystarczy, jeśli α będzie proporcjonalne do M).

331. Sposób c) jest, oczywiście, najgorszy, gdyż prądy wirowe płynęłyby w płaszczyźnie płytek bez przeszkód. Po starannej analizie można dojść do wniosku, że sposób b) jest nieco lepszy od a), gdyż prąd w uzwojeniu autotransformatora ma obok składowej „wokół prostokąta" także niewielką składową „w koło" (jest to faktycznie jeden zwój). Ta składowa wytwarza pole magnetyczne równoległe do osi walca, a związane z nią prądy wirowe będą silniej tłumione przy zastosowaniu sposobu b).

$$\sqrt[\otimes]{\sum\!\!\!\!\int !}=44$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Zadania z matematyki nr 441, 442

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2002

441. Rozważamy wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach rzeczywistych a, b, c, d oraz trójmian kwadratowy $T(x) = x^2 + px + q$ ze współczynnikami $p = 2 - a + b$, $q = W(-1)$. Dowieść, że jeżeli trójmian $T(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek nieujemny, to wielomian $W(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

442. Niech J oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 1. Czy istnieje funkcja $f\colon J \to J$, ciągła, ściśle rosnąca i taka, że wartości funkcji $g(x) = f(x)/x$ wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich?

Zadanie **442** zaproponował pan Marcin Peczarski z Latchorzewa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2002

Przypominamy treść zadań:

433. Znaleźć wszystkie funkcje wymierne
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (P,\ Q\ -\ \text{wielomiany rzeczywiste})$$
mające tę własność, że $f(x)^2 - f(x^2)$ jest funkcją stałą na zbiorze tych liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których $Q(x) \neq 0$ oraz $Q(x^2) \neq 0$.

434. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste styczne do tego okręgu w punktach A i C przecinają się w punkcie P, a styczne w punktach B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, C, Q są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B, D, P są współliniowe.

433. Każda funkcja stała spełnia zadane warunki. Dalej szukamy funkcji $f = P/Q$ różnych od stałej. Można przyjąć, że wielomiany P i Q są względnie pierwsze i że w wielomianie Q współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 1; zatem $Q(x) = x^n + M(x)$, gdzie M jest wielomianem stopnia niższego niż n. Oznaczając przez c stałą wartość różnicy $f(x)^2 - f(x^2)$ otrzymujemy równanie
$$P(x)^2 Q(x^2) = Q(x)^2 [cQ(x^2) + P(x^2)],$$
równoważne (wobec przyjętych założeń) układowi równań
$$Q(x^2) = Q(x)^2, \qquad P(x)^2 = cQ(x^2) + P(x^2).$$
Z pierwszego równania tego układu dostajemy związek $2x^n M(x) + M(x)^2 = M(x^2)$, który jest spełniony tylko wtedy, gdy M jest wielomianem zerowym (wystarczy porównać stopień po obu stronach). Zatem $Q(x) = x^n$ $(n \geq 0)$ i drugie równanie układu przybiera postać
$$(1) \qquad P(x)^2 = cx^{2n} + P(x^2).$$
Jeśli $c = 0$, to $P(x)^2 = P(x^2)$ i powtarzając rozumowanie przeprowadzone dla wielomianu Q wnosimy, że $P(x) = x^k$ $(k \geq 0)$. Skoro $f = P/Q \not\equiv \text{const}$, wykładniki n i k nie są jednocześnie zerami. Dostajemy rozwiązanie
$$(2) \qquad f(x) = x^m; \quad m \neq 0\ \text{ – liczba całkowita.}$$
Pozostaje przypadek, gdy $c \neq 0$. Gdy $n \geq 1$, równość (1) pokazuje, że $P(x) \not\equiv \text{const}$; gdy zaś $n = 0$, to także $P(x) = f(x) \not\equiv \text{const}$, w myśl przyjętego założenia. Tak więc P jest wielomianem stopnia dodatniego.

Niech $p \geq 1$ będzie najniższym wykładnikiem, dla którego x^p występuje w wielomianie P ze współczynnikiem $a \neq 0$. Zapisujemy więc ten wielomian w postaci
$$P(x) = b + ax^p + x^{p+1}R(x),$$
podstawiamy to do równania (1) i otrzymujemy
$$b^2 + 2bax^p + a^2x^{2p} + 2bx^{p+1}R(x) + \\ + 2ax^{2p+1}R(x) + x^{2p+2}R(x)^2 = \\ = b + cx^{2n} + ax^{2p} + x^{2p+2}R(x^2).$$
Gdy $n = 0$, przyrównanie wyrazów wolnych $(b^2 = b + c)$ pokazuje, że $b \neq 0$ (bo $c \neq 0$); po odjęciu wyrazów wolnych mamy po prawej stronie wielomian podzielny przez x^{2p}, a po lewej – nie. Zatem $n \geq 1$ i porównując wielomiany po obu stronach stwierdzamy kolejno, że $b^2 = b$, $2ba = c$, $p = 2n$, $a^2 = a$; skoro $c \neq 0$, to $b \neq 0$, więc $b = 1$, $a = 1$, $c = 2$; trzy pierwsze składniki po obu stronach znoszą się. Dzieląc pozostałą równość przez x^{p+1} otrzymujemy
$$2R(x) + 2x^pR(x) + x^{p+1}R(x)^2 = x^{p+1}R(x^2).$$
Jeśli wielomian R nie jest zerowy, to po obu stronach tej równości najwcześniejszy niezerowy współczynnik pojawia się przy różnych potęgach zmiennej. Wobec tego $R(x) \equiv 0$, czyli $P(x) = 1 + x^{2n}$, skąd
$$(3) \qquad f(x) = x^n + x^{-n}; \quad n \geq 1\ \text{ – liczba całkowita.}$$
Każda funkcja postaci (2) lub (3) oraz każda funkcja stała spełnia wymagane warunki; a z przeprowadzonego rozumowania wynika, że są to wszystkie takie funkcje.

434. Oznaczmy przez O i r środek i promień okręgu. Przyjmijmy, że wypukły kąt POQ ma miarę φ. Jeżeli $\varphi = 0°$ lub $\varphi \geq 90°$, to ani punkty A, C, Q, ani B, D, P nie tworzą trójki punktów współliniowych. Dalej zakładamy, że $0° < \varphi < 90°$. Rozważamy rzuty D' i P' punktów D i P na półprostą $OQ^{\to}$.

Warunek współliniowości trójki B, D, P jest teraz równoważny równości $|OD'| = |OP'|$. Ponieważ zaś $|OD'| \cdot |OQ| = r^2$ oraz $|OP'| = |OP| \cdot \cos\varphi$, uzyskana równość jest równoważna następującej: $|OP| \cdot |OQ| \cdot \cos\varphi = r^2$. Ten ostatni warunek, niezmienniczy przy zamianie P z Q, jest jednocześnie równoważny współliniowości trójki A, C, Q, wobec symetrii ról obu trójek.