5/02 (53)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

O RÓWNYCH SUMACH TRZECH PIĄTYCH POTĘG I NIE TYLKO

Nie są znane przykłady równych sum dwóch piątych potęg, bez trudu przychodzi jednak znalezienie równych sum trzech piątych potęg liczb całkowitych dodatnich.
W liczbach mniejszych od 100 znajdujemy cztery przykłady:

$$66^5 + 44^5 + 18^5 = 64^5 + 51^5 + 13^5$$
$$67^5 + 28^5 + 24^5 = 62^5 + 54^5 + 3^5$$
$$74^5 + 43^5 + 21^5 = 68^5 + 62^5 + 8^5$$
$$83^5 + 67^5 + 56^5 = 81^5 + 72^5 + 53^5.$$

Rozwiązania równania

$$a^5 + b^5 + c^5 = d^5 + e^5 + f^5 \tag{5.3.3}$$

lubią spełniać jednocześnie równanie

$$a + b + c = d + e + f. \tag{1.3.3}$$

Spośród 204 rozwiązań pierwotnych (tzn. o największym wspólnym dzielniku 1) równania (5.3.3) w liczbach mniejszych od 1000 aż 131 spełnia równanie (1.3.3).
Najmniejszym rozwiązaniem równania (5.3.3) niespełniającym równania (1.3.3) jest

$$118^5 + 85^5 + 26^5 = 116^5 + 90^5 + 53^5.$$

Wiadomo, że równanie (5.3.3) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych w liczbach całkowitych dodatnich, znane są bowiem rozwiązania parametryczne tego równania.
Ciekawym przykładem jest rozwiązanie w liczbach pierwszych:

$$6379^5 + 3833^5 + 2657^5 = 6089^5 + 5003^5 + 1777^5.$$

Jednak najbardziej zafascynowany jestem następującymi czterema rozwiązaniami:

$$1258^5 + 582^5 + 455^5 = 1153^5 + 1037^5 + 105^5$$
$$47273^5 + 9717^5 + 5681^5 = 47242^5 + 15398^5 + 31^5$$
$$55772^5 + 25403^5 + 19264^5 = 51858^5 + 44667^5 + 3914^5$$
$$71362^5 + 37983^5 + 27745^5 = 65728^5 + 59070^5 + 12292^5.$$

Jeśli uruchomisz swoją spostrzegawczość, Drogi Czytelniku, zapewne odkryjesz, jaką wspólną własność mają powyższe rozwiązania. Nie wiem, czy istnieją inne rozwiązania o tej własności, jeśli znajdziesz jeszcze jedno, daj mi znać, będę pod wrażeniem.

Z sumami piątych potęg wiąże się poniższa hipoteza Eulera, będąca uogólnieniem wielkiego twierdzenia Fermata:

HIPOTEZA EULERA: Dla dowolnej liczby $n \geq 3$ równanie

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n = a_n^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Innymi słowy, zgodnie z hipotezą Eulera n-tej potęgi nie można przedstawić przy pomocy sumy mniej niż n n-tych potęg. Hipoteza wydawała się całkiem sensowna, zważywszy że o przykłady rozkładu n-tej potęgi na sumę n n-tych potęg nietrudno. Mamy bowiem:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$
$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$$
$$353^4 = 315^4 + 272^4 + 120^4 + 30^4.$$

Z drugiej strony, zgodnie z wielkim twierdzeniem Fermata, sześcianu liczby całkowitej dodatniej nie można rozłożyć na sumę dwóch sześcianów.

Hipoteza Eulera „była prawdziwa" do roku 1966, kiedy to Lander, Parkin i Selfridge znaleźli rozkład piątej potęgi na sumę **czterech** piątych potęg:

$$144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5. \tag{5.1.4}$$

Sformułowali oni wówczas następującą hipotezę:

HIPOTEZA (LANDER, PARKIN, SELFRIDGE): Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 3$ równanie

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n = b_1^n + b_2^n + \ldots + b_l^n \tag{n.k.l}$$

nie ma nietrywialnych rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, gdy $k + l < n$.

Innymi słowy, żadne nietrywialne równanie nie może być spełnione przez mniej niż n n-tych potęg. Hipoteza ta do dziś nie została obalona, ani udowodniona.

Rozwiązania równania $(n.k.l)$, gdzie $k \leq l$, będziemy nazywać rozwiązaniami typu (n, k, l).

Interesujący jest przypadek $k + l = n$. Otóż dotychczas znanych jest 6 typów takich rozwiązań. O trzech typach wiadomo, że mają nieskończenie wiele istotnie różnych rozwiązań:
$(4, 2, 2)$ – o równych sumach dwóch czwartych potęg napisaliśmy w kwietniu,
$(4, 1, 3)$ – o tym poniżej,
$(6, 3, 3)$ – o tym za miesiąc, zgodnie z zasadą, że o n-tych potęgach piszemy głównie w n-tym miesiącu roku $6^4 + 5^4 + 3^4 = \binom{6+5+3}{5}$.

Dla trzech typów znanych jest po jednym **(słownie: jednym)** rozwiązaniu. Są to: (5,1,4), (5,2,3) i (8,3,5).

Rozwiązanie typu (5,2,3) znaleźli Scher i Seidl w 1997 roku:

$$14132^5 + 220^5 = 14068^5 + 6237^5 + 5027^5.$$

Jeśli zaś chodzi o czwarte potęgi równe sumie trzech czwartych potęg, co jest jedynym znanym oprócz (5,1,4) kontrprzykładem do hipotezy Eulera, to pierwszy przykład

$$20615673^4 = 18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4$$

wraz z dowodem istnienia nieskończenie wielu rozwiązań podał Noam Elkies w 1986 roku.

Później znaleziono najmniejsze rozwiązanie:

$$422481^4 = 414560^4 + 217519^4 + 95800^4.$$

A oto inne rozwiązania, do których udało mi się dotrzeć:

$$2813001^4 = 2767624^4 + 1390400 + 673865^4$$
$$8707481^4 = 8332208^4 + 5507880 + 1705575^4$$
$$12197457^4 = 11289040^4 + 8282543 + 5870000^4$$
$$16003017^4 = 14173720^4 + 12552200 + 4479031^4$$
$$16430513^4 = 16281009^4 + 7028600 + 3642840^4$$
$$638523249^4 = 630662624^4 + 275156240^4 + 219076465^4.$$

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl