Boltzmann i prawdopodobieństwo

W dziewiętnastym wieku dokonał się wielki przełom, kiedy fizycy utożsamili ciepło z energią. Istniała bowiem teoria cieplika, zgodnie z którą ciepło było pewną substancją przepływającą między ciałami. Ilość ciepła liczono w skądinąd dzisiaj bardzo popularnych kaloriach. Liczne doświadczenia potwierdzały jednak, że można zamienić ciepło na pracę i odwrotnie. Mniej więcej w połowie wieku ustalono liczbową zależność między ciepłem i energią: 1 kaloria = 4,186 J. W końcu sformułowano zasadę zachowania energii (pierwszą zasadę termodynamiki) w postaci wzoru

$$\Delta U = Q + W,$$

gdzie ΔU oznacza zmianę energii danego ciała, a Q i W to odpowiednio ciepło dostarczone temu ciału i praca nad nim wykonana.

Dużo większy problem był z drugą zasadą termodynamiki, która wymagała wprowadzenia pojęcia entropii (patrz *Delta* 7/2001). Ta zasada **postuluje** istnienie entropii S, czyli funkcji, która w układach izolowanych nigdy nie maleje i pozostaje stała w procesach odwracalnych. Druga zasada ma kilka sformułowań: Clausiusa, Kelvina, Plancka i innych, ale żadne z nich nie odwołuje się do równań mikroskopowych. Jest bowiem jasne, że na poziomie mikroskopowym wszystkie procesy są odwracalne, a więc coś trzeba dodać.

W końcu w 1877 roku austriacki fizyk Ludwig Boltzmann skojarzył entropię termodynamiczną z prawdopodobieństwem. Zauważył, że nie da się określić dokładnie, w jakim stanie (mikrostanie) znajduje się układ, ale można założyć, że wszystkie mikrostany są równie prawdopodobne. W ten sposób po raz pierwszy w fizyce pojawiło się prawdopodobieństwo. Było to coś na owe czasy niebywałego. Świat powinien przecież zachowywać się w sposób deterministyczny (stworzona pół wieku później mechanika kwantowa też jest deterministyczna).

Boltzmann poszedł dalej w swoich rozważaniach i zaczął zastanawiać się, jak pokazać, że entropia może wzrastać. Rozważył prosty model rozrzedzonego gazu doskonałego i napisał równanie ewolucji na prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki o danej prędkości w ustalonym punkcie przestrzeni. Potrzebował jednak istotnego założenia o tym, że cząsteczki poruszają się niezależnie (nie ma między nimi korelacji statystycznych). Następcy Boltzmanna rozwinęli ten pomysł i nazwali go **zasadą maksymalizacji entropii**. Oznacza to, że w układzie fizycznym wyróżniamy pewne wielkości, które możemy mierzyć. Może to być energia, liczba cząstek, pewne korelacje itp. W jednym kroku czasowym najpierw zmieniamy rozkład prawdopodobieństwa zgodnie z mikroskopowymi równaniami ruchu (równaniem Liouville'a lub równaniem von Neumanna), a następnie zmieniamy rozkład prawdopodobieństwa tak, aby przy ustalonych średnich wartościach naszych wyróżnionych wielkości entropia była największa. Wtedy wszelkie korelacje są najmniejsze, a entropia musi wzrastać.

Pomysł Boltzmanna doprowadził jednak do wielkiej kłótni między fizykami, którym nie podobały się argumenty statystyczne prowadzące do drugiej zasady termodynamiki. Podstawowy zarzut dotyczył niemożności uzyskania równania nieodwracalnego z odwracalnych równań mikroskopowych. Trzeba jednak pamiętać, że zasada maksymalizacji entropii jest subiektywna (nie opisuje stanu faktycznego, ale stan naszej wiedzy), a kierunek upływu czasu także zależy od człowieka (proces myślenia jest możliwy dzięki zasadzie wzrostu entropii). Krytycy Boltzmanna uważali też, że każdy układ fizyczny powraca po jakimś czasie do mikrostanu początkowego. Jest to prawda, tyle że dla litra wody średni czas powrotu przekroczyłby o wiele rzędów wielkości wiek Wszechświata. Tak samo zasada równych prawdopodobieństw mikrostanów w stanie równowagowym była krytykowana za brak solidnej argumentacji. Boltzmann twierdził, że układ fizyczny przechodzi dowolnie blisko każdego dozwolonego (odpowiadającego ustalonej energii) mikrostanu. Tym razem się mylił, bo nawet jeśli to prawda, to czas potrzebny do obejścia wszystkich mikrostanów jest rzędu czasu powrotu. Dziś wiadomo, że nie trzeba

Rozwiązanie zadania M 988.
a) Jeśli punkty X i Y są symetryczne względem prostej l_3, to punkty $S_{l_1}(X)$ i $S_{l_1}(Y)$ są symetryczne względem prostej l_2, tzn. $S_{l_1}(X) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$. Stąd $S_{l_1} \circ S_{l_3} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$, czyli $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

b) Załóżmy, że rozpatrywany wielokąt ma trzy osie symetrii, które nie przecinają się w jednym punkcie. Osie te tworzą wtedy trójkąt, gdyby bowiem pewne dwie z nich były równoległe, to złożenie symetrii osiowych względem tych prostych byłoby przesunięciem, które nie może być symetrią ograniczonej figury jaką jest wielokąt. Niech M będzie pewnym punktem wewnętrznym owego trójkąta, X zaś – punktem wielokąta, dla którego odległość $|MX|$ jest maksymalna. Punkty X i M leżą po jednej stronie pewnej z rozpatrywanych trzech osi symetrii l. Jeśli X' jest obrazem X przy symetrii osiowej względem l, to oczywiście X' jest punktem naszego wielokąta i $MX' > MX$, co przeczy temu, że X jest punktem wielokąta maksymalnie oddalonym od M.

Uwaga: Zauważmy, że teza zadania a) jest prawdziwa również w przestrzeni.

tu analizować ewolucji poszczególnych mikrostanów, ale można skorzystać z zasady maksymalizacji entropii.

Warto pamiętać, że druga zasada termodynamiki czy też zasada maksymalizacji entropii jest fundamentalnym prawem przyrody i nie można jej wyprowadzić z bardziej podstawowych praw, lecz tylko potwierdzać doświadczalnie. Dlatego Boltzmann w istocie przyczynił się do powstania nowego prawa fizyki.

Do dzisiaj idea Boltzmanna nie jest w pełni doceniana przez fizyków, którym bardzo trudno przestawić się z myślenia „to jest mój układ fizyczny” na „to jest moja informacja o układzie”. Sprawę komplikuje dodatkowo statystyczna interpretacja mechaniki kwantowej, która nie ma nic wspólnego ze statystyką w sensie Boltzmanna.

Adam BEDNORZ

Chaos

Suma przesądów nabytych w dzieciństwie podpowiada, że ruch zawsze jest dość prosty, choćby nawet wyglądał na skomplikowany. Rzeczywiście, nie wydaje się zbyt pogmatwany ruch upuszczonego kamienia, ruch wahadła czy wystrzelonego pocisku, a pozornie chaotyczny ruch planet nad naszymi głowami też daje się prosto wytłumaczyć jako nałożenie kilku ruchów periodycznych o różnych okresach (nazywa się taki ruch quasi–periodycznym). Oczywiście, ktoś złośliwy mógłby zapytać: a co z opisaniem ruchu cząsteczek w szklance wody? Czy to też taki prosty ruch? Ale my moglibyśmy wzruszyć ramionami i odpowiedzieć, że ruch ten jest skomplikowany tylko dlatego, że cząsteczek jest tak dużo, iż nawet nie potrafimy ich efektywnie ponumerować, a co dopiero obliczać ich trajektorie. Problem nie tkwi więc w charakterze ruchu, lecz w liczbie składników układu.

Odkrycie chaosu dokonało się wtedy, gdy zrozumiano, że nawet w bardzo prostych układach złożonych z niewielu cząstek możemy spotkać się z ruchem praktycznie nieprzewidywalnym, w którym drobne zmiany początkowego położenia powodują olbrzymie zmiany w ewolucji całego układu, a cząstki poruszają się po niezwykle zagmatwanych trajektoriach, nie dążą do żadnego stanu stacjonarnego ani nie poruszają się ruchem periodycznym czy też quasi–periodycznym. Niektórzy podejrzewają, że w połowie XIX wieku J.C. Maxwell wiedział już, że tego typu „dziwny ruch” charakteryzuje dwie zderzające się cząsteczki gazu umieszczone w pudełku. Podobnie dziwny ruch o niezwykle skomplikowanych trajektoriach odkrył pod koniec XIX stulecia H. Poincaré badając ruch trzech ciał oddziałujących na siebie siłą grawitacji. Później odkrywali chaos nie tylko matematycy, ale nawet żołnierze w okopach, choć ci ostatni pewnie nie do końca zdawali sobie z tego sprawę. Nieraz przeklinali bowiem wzmacniacze radiowe i ich producentów, nie wiedząc, że problem tkwił w samym równaniu, które opisuje sygnał wyjściowy wzmacniacza, gdy na wejściu jest czysty sinus. Jak odkryli potem M. Cartwright i J. Littlewood, przy dużych mocach rozwiązania wspomnianego równania stają się właśnie nieperiodyczne, chaotyczne. Wreszcie, pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku E. Lorenz odkrył, że rozwiązania pewnego bardzo prostego układu równań różniczkowych, wykorzystywanego w meteorologii, są bardzo wrażliwe na drobne zmiany warunków początkowych. Okazało się bowiem, że wystarczy zmienić cyfrę choćby na szóstym miejscu po przecinku w określeniu stanu początkowego, a układ będzie ewoluował zupełnie odmiennie. Odkryciem E. Lorenza nikt się jednak nie interesował, bo opublikował je w piśmie meteorologicznym, a jaki matematyk czyta takie pisma? Wyjątkowy raczej. W końcu jednak wraz z upowszechnieniem komputerów oglądanie wykresów rozwiązań prostych układów równań stało się zajęciem powszednim i nagle zrozumiano, że ruch chaotyczny wcale nie jest wyjątkiem, lecz raczej regułą.

Kto zatem „wymyślił chaos”? Kto pierwszy zdał sobie sprawę z jego istnienia i powszechności? Trudno jednoznacznie odpowiedzieć. W końcu już starożytni Grecy twierdzili, że był on na początku...

W. S.

Rozwiązanie zadania M 989.
Jak wynika z zadania 988b) wszystkie osie symetrii przechodzą przez jeden punkt O. Jeśli l_1 i l_2 są osiami symetrii W, to, jak wynika z zadania 988a), $l_3 = S_{l_1}(l_2)$ również nią jest. Wybierzmy jedną z osi symetrii l. Pozostałe osie można rozbić na pary osi symetrycznych względem l. Prosta l' prostopadła do l i przechodząca przez O musi być osią symetrii W, w przeciwnym bowiem razie liczba osi symetrii byłaby nieparzysta. Złożenie $S_{l'} \circ S_l$ jest symetrią względem O i przeprowadza W na siebie. Wynika stąd, że O jest środkiem symetrii W.

Rozwiązanie zadania M 990.
Wybierzmy jedną z osi symetrii l rozpatrywanej bryły. Pokażemy, że pozostałe osie można połączyć w pary, z czego będzie wynikać teza zadania. Jeśli l' jest osią symetrii, która nie przecina l lub nie jest do niej prostopadła, to prostą l' łączymy w parę z prostą symetryczną do l' względem l (jest ona osią symetrii na mocy tezy zadania 988a) – patrz uwaga). Jeśli zaś oś l' jest prostopadła do l i przecina ją w pewnym punkcie O, to łączymy ją w parę z prostą l'', która jest prostopadła do l i l' i przechodzi przez O (jest ona osią symetrii, bowiem jak nietrudno dowieść $S_{l''} = S_{l'} \circ S_l$). Jak więc widać, rozbicie na pary zbioru wszystkich osi symetrii oprócz l jest możliwe, z czego wynika teza zadania.