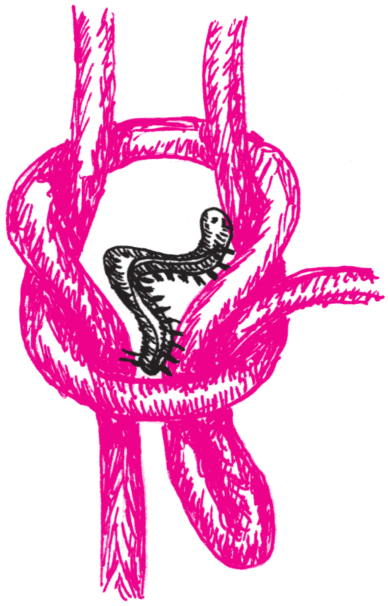


Ponieważ $l_e, l_{e+1} \geq e+1$, więc wynika stąd, że
$$2^{K+e+1}|(2^K-M)^2+M-2^K \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad e \geq e_0.$$
Jest to możliwe wtedy gdy $(2^K-M)^2+M-2^K=0$, czyli $(M-2^K)(M-2^K+1)=0$. Jest więc $M=2^K$ lub $w\cdot 2^K=M=2^K-1$. Z ostatniej równości wynika, że $2^K|1$, skąd $K=0$, $w=0$, co przeczy nieparzystości w. Zbadamy teraz przypadek $M=2^K$. Niech $K=r\cdot 2^f$, gdzie r jest liczbą nieparzystą naturalną, f – liczbą całkowitą nieujemną i niech liczba pierwsza $p=s\cdot 2^l+1$ (s, l – naturalne, s – nieparzyste) będzie dzielnikiem liczby $2^{2^f}+1$. Oczywiście $2^l+1 \leq s\cdot 2^l+1 \leq 2^{2^f}+1$, skąd $l \leq 2^f$.

Wobec tożsamości
$$2^{2^m}-1=(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)\ldots(2^{2^{m-1}}+1)$$
mamy $2^{2^f}+1|2^{2^m}-1$ dla $m \geq f+1$, a także $2^{2^f}+1|2^{2^f\cdot r}+1$ (bo r jest nieparzyste).

Zatem dla dowolnego $m \geq f+1$ mamy
$$2^{2^f}+1|(2^{2^m}-1)+(2^{2^f\cdot r}+1)=2^{2^m}+2^K.$$

Ponieważ $p|2^{2^f}+1$, więc $p|2^{2^m}+2^K$ dla $m \geq f+1$.

Połóżmy $m=2^f$. (Możemy to zrobić, gdyż $2^f \geq f+1$ dla każdego $f \in N \cup \{0\}$, co można wykazać indukcyjnie.) Wobec tego spełniona jest podzielność
$$p|2^{2^e}+M,$$
gdzie $e=2^f$, $M=2^K$ oraz spełniony jest warunek $l \leq 2^f=e$. Tym samym twierdzenie jest udowodnione.

Wniosek. Jeżeli $M \neq 1$ jest liczbą całkowitą, to wśród liczb postaci $2^{2^m}+M$ $(m=1,2,\ldots)$ jest nieskończenie wiele liczb złożonych. (Twierdzenie to wykazał A. Schinzel – zadanie nr 123, str. 18 i 68, ze wspomnianej książeczki Sierpińskiego.) Udowodnione w niniejszej pracy twierdzenie pokazuje, że gdy m przebiega pewien ciąg arytmetyczny, liczby $2^{2^m}+M$ są złożone.

Uwaga. Dla $M=1$ mamy liczby Fermata $F_m=2^{2^m}+1$. Liczby F_1, F_2, F_3, F_4 są pierwsze. Wiadomo również, że liczby $F_5, F_6, \ldots, F_{30}$ są złożone (i niektóre inne).
Nie wiadomo:
Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb złożonych?
Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb pierwszych?

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 985. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez 5^n i niezawierająca 0 w swoim zapisie dziesiętnym.
Rozwiązanie na str. 5

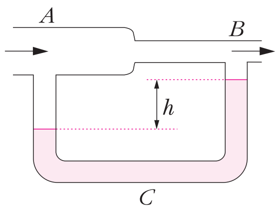
M 986. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n $(n \in \mathbb{N})$, w których zapisie dziesiętnym występuje 2001 zer z rzędu.
Rozwiązanie na str. 5

M 987. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n $(n \in \mathbb{N})$, w których zapisie dziesiętnym każda z ostatnich m cyfr ma parzystość różną od parzystości cyfr sąsiednich.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 569. Na stole stoi duży cylinder wypełniony wodą do wysokości H. W odległości $H/2$ od cylindra znajduje się pojemnik o szerokości $H/4$ i wysokości $H/4$. Na jakiej wysokości h od dna cylindra należy zrobić mały otworek, tak aby struga wody trafiła do pojemnika? Wysokość wody w cylindrze pozostaje stała.
Rozwiązanie na str. 1

F 570. Przez rurę na poniższym rysunku pompowane jest powietrze z szybkością 15 litrów na minutę. Przekrój szerszej części rury A wynosi $2\ \mathrm{cm}^2$, węższej jest B $0{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Znaleźć różnicę poziomów wody w rurze C, jeśli jej przekrój wynosi $0{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Gęstość powietrza wynosi $\rho = 1{,}32\ \mathrm{kg/m}^3$.



Rozwiązanie na str. 7