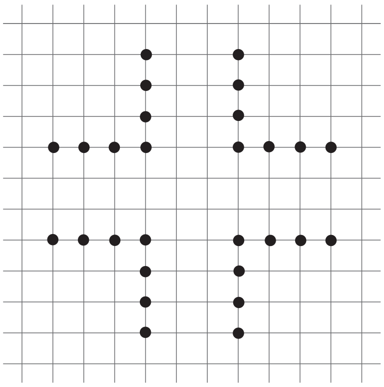
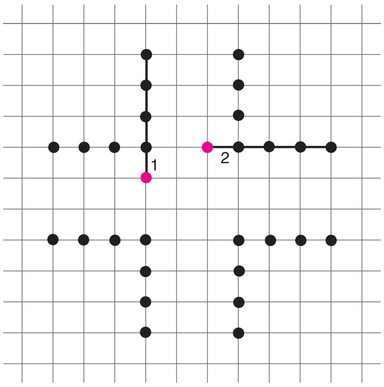
Samotnik

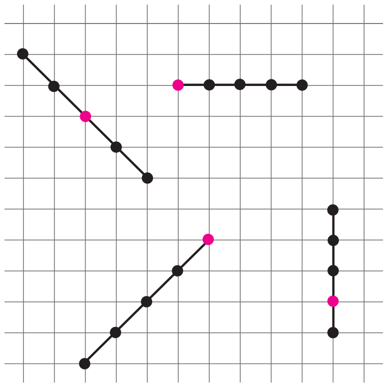
Krzysztof PAWŁOWICZ



Niektórzy Czytelnicy spotkali się być może z grą zwaną samotnikiem. Należy wziąć kartkę papieru w kratkę i zakropkować pewną liczbę przecięć linii – punktów kratowych. W wersji najczęściej spotykanej kropki początkowo naśladują krzyż zbudowany z 28 kropek.

Gra polega na wykonywaniu ciągu operacji – posunięć: zakropkowujemy kolejny punkt kratowy tak, by można było poprowadzić odcinek zawierający ten punkt oraz cztery wcześniej zakropkowane. Odcinek musi zaczynać się i kończyć kropką, a jego długość to „cztery kratki”. Odcinki mogą być pionowe, poziome lub ukośne. Jak to bywa z samotnikami, zadaniem gracza jest możliwie długie kontynuowanie gry.





Tu nasuwa się pytanie: jak długo można grać i czy w ogóle każda gra musi się kiedyś skończyć z powodu wyczerpania dozwolonych posunięć. Z doświadczenia wiem, że przekroczenie granicy 60 nowych kropek (czy odcinków) jest niełatwe. Tu zajmiemy się problemem skończoności gry. Załóżmy, że na początku mamy pewną liczbę kropek na kartce, powiedzmy 28. Z każdą kropką K można związać od 0 do 8 „stopni swobody” oznaczających liczbę sąsiednich pól kratowych niepołączonych jeszcze z K odcinkiem. Początkowo każda z 28 kropek ma „pełną swobodę”, czyli całkowita liczba „stopni swobody” to $28 \cdot 8 = 224$. Liczbę tę nazwiemy energią układu. Wykonanie posunięcia to dorysowanie kropki i odcinka. Dorysowanie kropki zwiększa energię o 8. Natomiast dorysowanie odcinka „zabija” po jednym „stopniu swobody” ze skrajnych kropek i po dwa „stopnie swobody” z wewnętrzych kropek tego odcinka. Łącznie odcinek „zabija” 8 „stopni swobody”, czyli całe posunięcie nie zmienia energii układu. Gdyby posunięcie zmniejszało energię, to łatwo zakończylibyśmy rozumowanie: w skończonej liczbie ruchów osiągnęlibyśmy energię układu mniejszą od potrzebnej na wykonanie posunięcia, czyli możliwe posunięcia wyczerpałyby się po nie więcej niż 224 posunięciach. W naszym przypadku energia się nie zmienia. Jednak można nieco ulepszyć rozumowanie. Zauważmy bowiem, że energia układu to „niewykorzystane” stopnie swobody wszystkich dotychczasowych kropek, w szczególności kropek skrajnych, leżących na brzegu powstającego tworu. Każda z tych kropek dodaje co najmniej 1 do całkowitej liczby stopni swobody. Zatem liczba kropek brzegowych w dowolnym momencie gry nie może przekroczyć początkowej energii układu, nie zmieniającej się w trakcie gry. W naszym przypadku liczba ta wynosi 224. Gry nie można więc kontynuować w nieskończoność, bo wówczas brzeg tworu musiałby się wydłużać nieograniczenie.

Zadanie: znaleźć najlepsze ograniczenie górne na liczbę kresek.

Rozwiązanie zadania F 569.
Prędkość strugi wody wypływającej z otworu wynosi $v = 2g(H-h)$. Czas spadania z wysokości h do $H/4$ to $t = \sqrt{2(h-H/4)/g}$, pozioma odległość pokonana w tym czasie przez strugę wynosi $s = vt = \sqrt{4(H-h)(h-H/4)}$. Aby struga wody trafiła do naczynia, musi zachodzić

$$\frac{H}{2} < 2\sqrt{(H-h)(h-H/4)} < \frac{3}{4}H.$$

Z nierówności

$$\frac{H}{2} < 2\sqrt{(H-h)(h-H/4)}$$

otrzymujemy

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8}H < h < \frac{5+\sqrt{5}}{8}H,$$

z drugiej zaś $h \neq \frac{5}{8}H$. Zatem warunki zadania są spełnione dla

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8}H < h < \frac{5}{8}H$$

lub

$$\frac{5}{8}H < h < \frac{5+\sqrt{5}}{8}H.$$