O równości $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$

Paweł STRZELECKI

Więcej informacji o funkcji zeta Riemanna i związanej z nią hipotezie Riemanna (która jest jednym z najsłynniejszych nierozwiązanych problemów w całej matematyce) można znaleźć w dwóch artykułach Romana Dwilewicza i Jána Mináča w *Delcie* 9/1997 i 11/1997.

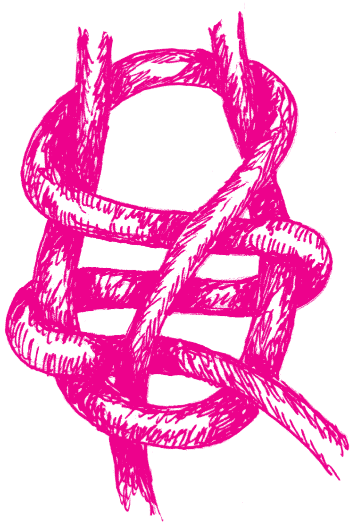
Funkcja zeta Riemanna, zdefiniowana dla liczb $s>1$ wzorem

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1}$$

przyjmuje w punkcie $s=2$ wartość $\frac{\pi^2}{6}$; wiedział o tym już Euler 250 lat temu. Wiedział (choć nazwy *zeta Riemanna* nie używał) znacznie więcej: wykazał mianowicie, że dla każdej liczby parzystej dodatniej $s=2k$ liczba $\zeta(s)$ jest wymierną wielokrotnością π^s, i znalazł niezbyt skomplikowany przepis na współczynnik owej wielokrotności. Dzięki temu potrafimy dziś podać całą serię wzorów na $\zeta(2k)$: np. $\zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$, a, dajmy na to,

$$\zeta(30)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{30}}=\frac{6892673020804\,\pi^{30}}{5660878804669082674070015625}.$$

Sumowania szeregu (1) dla parzystych s uczy się dziś studentów. Można to robić różnymi sposobami i z różnej okazji; na ogół wykorzystuje się w tym celu szeregi Fouriera lub teorię funkcji analitycznych i twierdzenie o residuach. Zaleta jest taka, że za każdym razem otrzymuje się ogólną metodę sumowania wielu szeregów, wada taka, że trochę się trzeba namęczyć.



W drugim wydaniu książki *Proofs from the Book* Martina Aignera i Günthera Zieglera można znaleźć jeszcze inny dowód równości $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, krótki, błyskotliwy, zupełnie elementarny, obarczony może jedną wadą: nie widać, jak z tej samej sztuczki wycisnąć wzór na $\zeta(2k)$ dla naturalnych $k>1$. (Tzn. piszący te słowa nie widzi – być może Czytelnicy *Delty* zobaczą.)

Oto ów dowód, ku pokrzepieniu serc w czasach, gdy coraz trudniej szukać rzeczy pewnych i pięknych poza matematyką.

Ustalmy liczbę naturalną k i niech $x_j=j\pi/(2k+1)$ dla $j=1,\ldots,k$. Posłużymy się dwiema tożsamościami:

$$\sum_{j=1}^{k}\operatorname{ctg}^2 x_j=\frac{2k(2k-1)}{6},\qquad \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sin^2 x_j}=k+\frac{2k(2k-1)}{6}=\frac{2k(2k+2)}{6}.$$

Liczbom zespolonym poświęcona była *Delta* 10/2000.

Druga z nich natychmiast wynika z pierwszej: wszak $1/\sin^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x$, więc dodając jedynkę do każdego składnika pierwszej sumy, zamienimy kwadraty kotangensów na odwrotności kwadratów sinusów, a cała suma zwiększy się właśnie o k. Pierwsza tożsamość wynika natomiast ze wzoru de Moivre'a $\cos nx+i\sin nx=(\cos x+i\sin x)^n$. Jak? To proste. Kto chce, niech sam się przekona, a potem wróci do tekstu, na początek następnej strony; dla pozostałych zamieszczamy szczegóły.

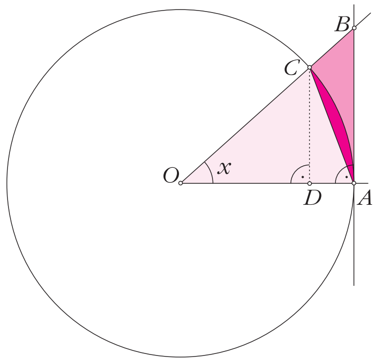
Trzeba rozwinąć wyrażenie $(\cos x+i\sin x)^n$, stosując dwumian Newtona (i pamiętając, że $i^2=-1$), a następnie porównać części urojone obu stron wzoru de Moivre'a i podzielić otrzymaną równość przez $\sin^n x$. Da to wynik

$$\frac{\sin nx}{\sin^n x}=\binom{n}{1}\operatorname{ctg}^{n-1}x-\binom{n}{3}\operatorname{ctg}^{n-3}x\pm\cdots\qquad(x\neq 0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots).$$

Teraz zaś należy wziąć $n=2k+1$ i podstawić x_j w miejsce x. Lewa strona zniknie, gdyż $nx_j=j\pi$, a zatem

$$0=\binom{2k+1}{1}\operatorname{ctg}^{2k}x_j-\binom{2k+1}{3}\operatorname{ctg}^{2k-2}x_j\pm\cdots\qquad\text{dla } j=1,\ldots,k.$$

Wielomian $W(t):=\binom{2k+1}{1}t^k-\binom{2k+1}{3}t^{k-1}\pm\cdots+(-1)^k\binom{2k+1}{2k+1}$ ma więc k pierwiastków: są nimi liczby $t_j=\operatorname{ctg}^2 x_j$, gdzie $j=1,\ldots,k$.



Jeśli $\sphericalangle AOB = x$ i $OA = OC = 1$, to $CD = \sin x$ i $AB = \operatorname{tg} x$. Ponadto, $\triangle OAC$ ma pole równe $\frac{1}{2}\sin x$, $\triangle OAB$ – pole równe $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Wycinek koła oparty na łuku AC ma pole $\frac{1}{2}x$, a więc $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Stopień tego wielomianu jest równy k, a stąd wynika, że

$$W(t) = \binom{2k+1}{1}(t-t_1)\cdot\ldots\cdot(t-t_k).$$

Stosując wzór Viète'a na sumę pierwiastków, tzn. porównując współczynniki przy t^{k-1} w obu zapisach wielomianu W, otrzymamy

$$t_1 + \ldots + t_k = \frac{\binom{2k+1}{3}}{\binom{2k+1}{1}} = \frac{2k(2k-1)}{6},$$

a to jest właśnie poszukiwany wzór na sumę kwadratów cotangensów liczb x_j.

Posłużymy się też elementarną nierównością $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, zachodzącą dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wynika z niej, że

$$0 < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}, \quad \text{a więc} \quad \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

W ostatniej nierówności wstawiamy $x = x_j$, gdzie $j = 1, \ldots, k$. Otrzymujemy k nierówności, które dodajemy stronami, wykorzystując wcześniejsze wzory na sumy kwadratów odpowiednich funkcji trygonometrycznych. Oto wynik tego postępowania:

$$\frac{2k(2k-1)}{6} < \left(\frac{2k+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2k+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{2k(2k+2)}{6}$$

lub, po pomnożeniu stron przez $\pi^2/(2k+1)^2$,

$$\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2k(2k-1)}{(2k+1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}.$$

Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach; zarówno lewa, jak i prawa strona powyższego wyrażenia ma dla $k \to \infty$ granicę $\pi^2/6$, a stąd

$$\zeta(2) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że otrzymaliśmy także oszacowanie tempa zbieżności sum częściowych szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$; mianowicie,

$$\frac{\pi^2}{6(2k+1)^2} < \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{4k+2} \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Na zakończenie warto dodać, że o wartościach funkcji ζ dla liczb nieparzystych większych od 1, czyli o sumach szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2k+1}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots$, wiadomo bardzo niewiele. W roku 1978, ponad dwieście lat po ukazaniu się *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* Leonharda Eulera, książki zawierającej m.in. wzory na $\zeta(2k)$, Roger Apéry wykazał, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną. Jego dowód składał się z wielu iście ekwilibrystycznych lematów i oszacowań – i był *pierwszą* nietrywialną informacją o którejkolwiek z liczb $\zeta(2k+1)$. Przez kolejnych dwadzieścia lat nie stało się nic. Późną wiosną roku 2000 Tanguy Rivoal z Uniwersytetu w Caen we Francji dowiódł, że wśród wszystkich liczb $\zeta(2k+1)$ jest nieskończenie wiele liczb niewymiernych; dokładniej, liczba liczb niewymiernych w zbiorze

$$\{\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2n+1)\}$$

rośnie dla $n \to \infty$ przynajmniej w takim tempie, jak $C \log n$ dla pewnej dodatniej stałej C. Nie wiadomo, niestety, *które* z liczb $\zeta(2k+1)$ są niewymierne; prócz $\zeta(3)$ nie potrafimy wskazać żadnej.

Jak widać, pole do popisu jest szerokie (a co za tym idzie, niełatwe). Zresztą, nawet gdy się ktoś z wartościami funkcji zeta w liczbach naturalnych do końca upora, to i tak zostanie jeszcze hipoteza Riemanna…

Rozwiązanie zadania M 985.
Załóżmy, że pierwsze 0 licząc od końca (tzn. od cyfry jedności) w liczbie 5^n stoi na k-tym miejscu ($k > 0$). Dodając do 5^n liczbę $5^n \cdot 10^{k-1}$ sprawimy, że żadna z ostatnich k cyfr powstałej sumy nie jest równa 0. Postępując dalej w ten sposób skonstruujemy liczbę, której ostatnich n cyfr jest różnych od 0. Odrzucając teraz wszystkie cyfry oprócz ostatnich n, otrzymamy szukaną liczbę.

Rozwiązanie zadania M 986.
Najpierw wykażemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb $m \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $2^k | (5^m - 1)$. Wśród liczb $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{2^k}$ istnieją dwie 5^p i 5^q ($p > q$), które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 2^k. Wtedy ich różnica $5^p - 5^q = 5^q(5^{p-q} - 1)$ jest podzielna przez 2^k, czyli dowolna liczba postaci $5^{r(p-q)} - 1$ ($r \in \mathbb{N}$) jest podzielna przez 2^k.

Dla każdego m, dla którego $2^k | (5^m - 1)$ zachodzi $10^k | (5^{m+k} - 5^k)$, tzn. ostatnie k cyfr w liczbach 5^{m+k} i 5^k są takie same. Niech k będzie takie, że $2^k > 10^{2001}$. Wtedy $5^k = \frac{10^k}{2^k} < 10^{k-2001}$, więc 5^k ma nie więcej niż $k - 2001$ cyfr. Stąd i z faktu, że ostatnie k cyfr w liczbach 5^{m+k} i 5^k są takie same wynika, że wszystkie cyfry od miejsca $k - 2000$ do k (jest ich 2001 i stoją kolejno) w liczbie 5^{m+k} są równe 0.