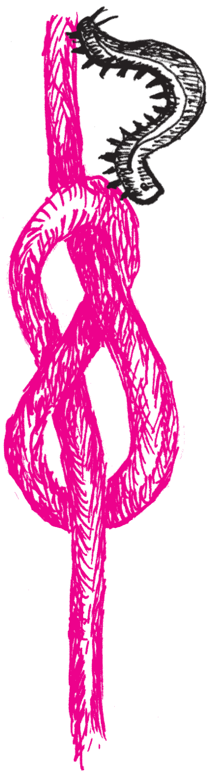
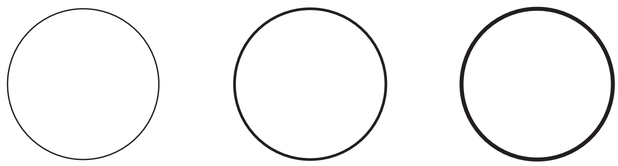
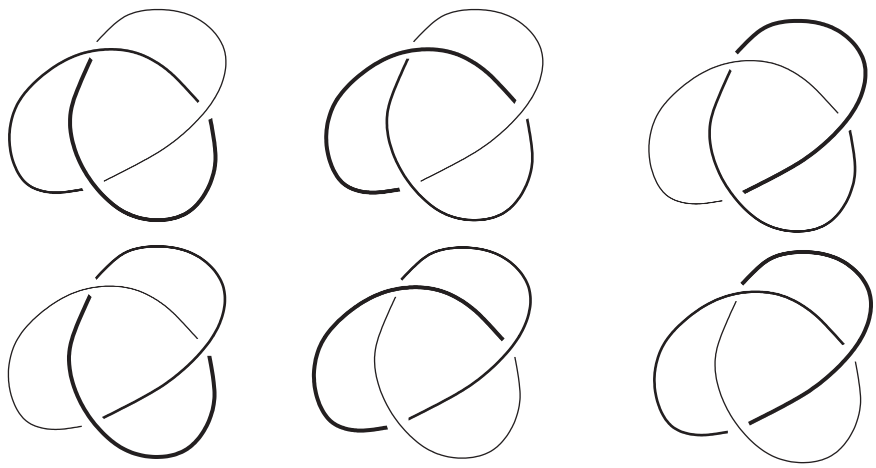


Jak odróżnić węzły?

– Skąd wiecie, że nie można rozwiązać każdego węzła, czyli jednego sznurka o połączonych końcach? – spytał Pawełek i spojrzawszy na Tomka dodał – pisałeś przecież wypracowanie o Aleksandrze Macedońskim i węźle gordyjskim.
Tomek spojrzał na nas niepewnie.
– Ale my nie dopuszczamy cięcia i klejenia. Opowiedz, tata – zwrócił się do mnie – o 3-kolorowaniu, mówiłeś kiedyś, że to najprostsza metoda odróżniania węzłów.
– Już opowiadam – podchwyciłem. – Przygotujcie się na dłuższą historię i pamiętajcie, że trójkolorowanie odróżnia tylko niektóre węzły. Połóżmy węzeł płasko na stole, tak, by jedynymi miejscami, gdzie nie dotyka on stołu, były „mosty” skrzyżowań. Takie położenie nazwiemy diagramem węzła. Pomalujmy teraz nasz diagram węzła trzema kolorami (czerwonym, zielonym i niebieskim), używając tego samego koloru od tunelu do tunelu. Wokół skrzyżowania mamy ograniczenie: albo spotykają się trzy różne kolory, albo całe skrzyżowanie używa tylko jednego koloru.
– To ja pomaluję cały węzeł na zielono – wtrącił Paweł.
– To jest dozwolone – zgodziłem się. – Nazwiemy to trywialnym kolorowaniem. Każdy węzeł ma trzy trywialne kolorowania, ale interesują nas wszystkie dopuszczalne 3-kolorowania i te nietrywialne są ciekawsze. Np. diagram węzła trywialnego ma tylko trzy kolorowania (wszystkie trywialne; rys. 1), ale diagram trójlistnika ma jeszcze sześć nietrywialnych 3-kolorowań, czyli w sumie dziewięć 3-kolorowań (rys. 2).

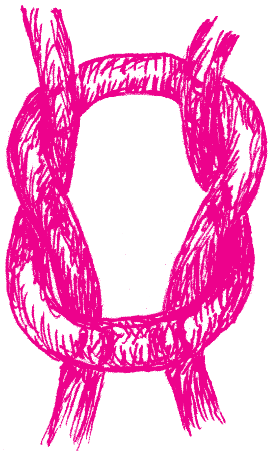


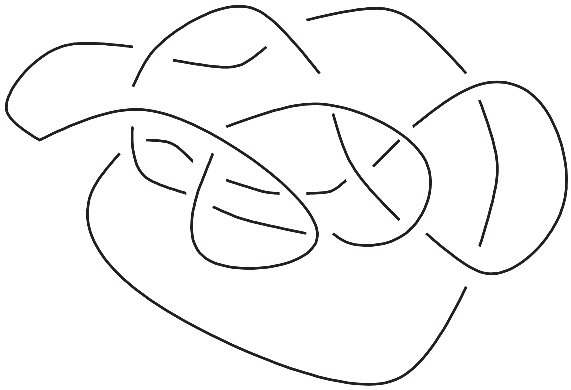
Rys. 1. Różne kolory zaznaczone są różną grubością kreski.



Rys. 2. Sześć nietrywialnych kolorowań węzła trójlistnego.

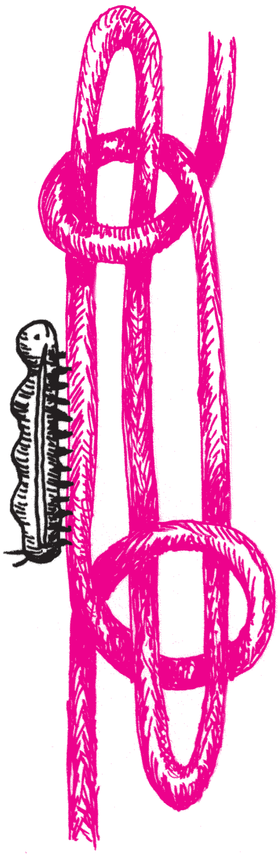
-- Ależ tata! – oburzył się Pawełek. – Każdy widzi, że diagram trywialny jest inny niż diagram trójlistnika, który narysowałeś, ale ja i dla węzła trywialnego znajdę zawiły diagram, jak ten na rysunku 3. Może wtedy będę miał dziewięć 3-kolorowań?

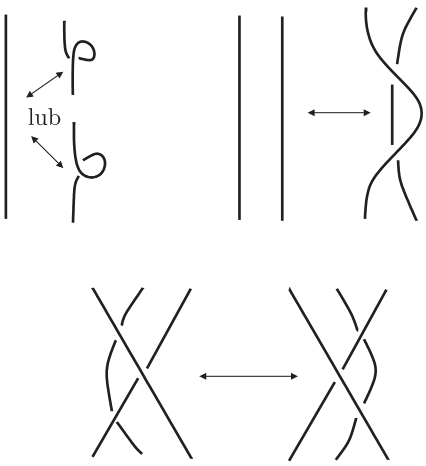




Rys. 3. Nietrywialny diagram trywialnego węzła.

– Na pewno każdy diagram ustalonego węzła da ten sam wynik – zastanawiał się Tomek. – Ale jak to wykazać?
– Główną trudnością – podpowiedziałem – jest przetłumaczenie deformacji węzła w przestrzeni na język diagramów. Zrobił to już dla nas ponad 70 lat temu niemiecki matematyk Kurt Reidemeister. Pokazał on, że ruch w przestrzeni można rozbić na małe kroki i łatwo przetłumaczyć te kroki na małe zmiany diagramu. Są trzy takie elementarne deformacje, które nazywamy ruchami Reidemeistera; pokazane są one poniżej (na rysunku pomijamy część diagramu, która się nie zmienia).





Rys. 4

– Rozumiem – ucieszył się Tomek. – Jeśli dwa diagramy reprezentują ten sam węzeł, to można od jednego do drugiego przejść ruchami Reidemeistera.
– Ciekawe, co robią te ruchy z 3-kolorowaniami – dodał Pawełek.
Dzieci zabrały się do sprawdzania tego, że ruchy Reidemeistera nie zmieniają liczby 3-kolorowań diagramu.

Życzę i Wam, Czytelnicy, miłej zabawy.

Rysunki Autora.

Małą Deltę z pomocą Tomka i Pawełka opracował Józef PRZYTYCKI