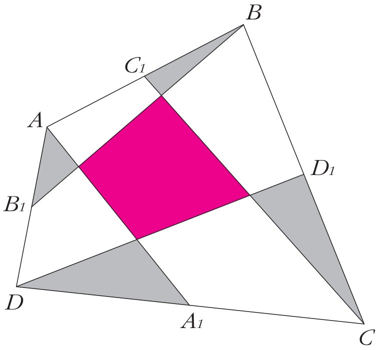
# Kto rozwiąże lepiej?

*Łukasz WIECHECKI*

Tradycyjnie już spotkaliśmy się w ramach V Festiwalu Nauki na turnieju rozwiązywania zadań. Jak zwykle nie zabrakło ani herbatki, ani pączków, a wszystkie zadania znalazły swego pogromcę. Jakie one były, przedstawiamy obok.

**Zad. 1.** W czworokącie wypukłym połączono wierzchołki z odpowiednimi środkami jak na rysunku 1. Udowodnić, że pole kolorowego czworokąta jest równe sumie pól szarych trójkątów.

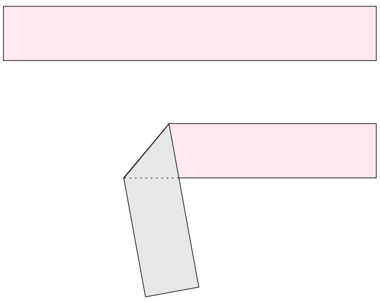
**Rozwiązanie.** Poprowadźmy prostą $AC$. Mamy $P_{AA_1C} = \frac{1}{2}P_{ABC}$ i $P_{ACC_1} = \frac{1}{2}P_{ACD}$, z czego po zsumowaniu $P_{AA_1CC_1} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Analogicznie wykazujemy, że $P_{BD_1DB_1} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że część czworokąta $ABCD$, której czworokąty $AC_1CA_1$ i $BD_1DB_1$ nie pokrywają, ma takie samo pole jak ich część, którą pokrywają dwa razy.




Rys. 1

**Zad. 2.** Weźmy prostokątny pasek papieru, który można nakryć kołem o promieniu 1. Zegnijmy w pewnym miejscu pasek (rys. 2). Czy teraz też można nakryć pasek kołem o promieniu 1?

**Rozwiązanie.** Tak. Widać to od razu, jeśli razem z paskiem papieru zegniemy wzdłuż tej samej prostej koło o promieniu 1, które pokrywa pasek.



Rys. 2

**Zad. 3.** Znaleźć maksymalną liczbę rosnących trójwyrazowych ciągów arytmetycznych, które mogą być wybrane z ciągu liczb $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

**Rozwiązanie.** Liczba $a_k$ może być środkowym wyrazem nie więcej niż $\min(k-1, n-k)$ trójwyrazowych rosnących ciągów arytmetycznych. Dlatego całkowita liczba takich ciągów nie może być większa niż $0+1+2+\ldots+[\frac{n-1}{2}]+\ldots+2+1+0$. Suma ta jest równa $\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)$ dla $n$ parzystego i $(\frac{n-1}{2})^2$ dla $n$ nieparzystego. Suma ta jest realizowalna np. dla ciągu $1, 2, \ldots, n$.

**Zad. 4.** Na okręgu rozmieszczono w pewnym porządku 15 białych i 15 czarnych pionków. W jednym posunięciu można zamienić miejscami dowolne dwa pionki. Jaka jest minimalna liczba przesunięć, która z dowolnego początkowego rozmieszczenia pozwala przejść do rozmieszczenia, w którym dowolne dwa sąsiednie pionki są różnego koloru?

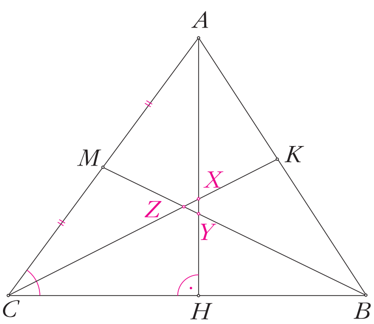
**Rozwiązanie.** Ponumerujmy pionki od 1 do 30 zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że wśród 15 pionków z parzystymi numerami jest nie więcej niż 7 białych. Wtedy wśród pionków z nieparzystymi numerami jest tyle samo czarnych. Zamieniając je miejscami z białymi pionkami mającymi parzyste numery otrzymamy żądaną konfigurację po nie więcej niż 7 posunięciach. Łatwo widać, że przy początkowym rozmieszczeniu, w którym wszystkie białe pionki są koło siebie, potrzebnych jest co najmniej 7 posunięć, żeby żadne dwa białe pionki nie stały obok siebie.

**Zad. 5.** W turnieju uczestniczy $2m$ drużyn. W pierwszej turze grało pewnych $m$ par drużyn, w drugiej zaś – $m$ innych par. Udowodnić, że po dwóch turach można wybrać $m$ drużyn, z których żadne dwie nie grały ze sobą.

**Rozwiązanie.** Przedstawmy nasze $2m$ drużyn jako punkty na płaszczyźnie. Pary drużyn, które spotkały się w pierwszej turze połączmy niebieskimi odcinkami, a pary, które spotkały się w drugiej turze – odcinkami czerwonymi. Wtedy z każdego punktu będą wychodzić dwa odcinki: jeden niebieski i jeden czerwony. Tworzą się cykle. Każdy punkt należy do pewnego cyklu. W każdym cyklu jest parzysta liczba punktów. Z każdego cyklu wybieramy połowę punktów według zasady „co drugi”. I jesteśmy w domu.

**Zad. 6.** W trójkącie ostrokątnym poprowadzono z różnych wierzchołków środkową, dwusieczną kąta i wysokość. Czy możliwe jest, aby punkty ich przecięcia tworzyły trójkąt równoboczny?

**Rozwiązanie.** Nie. Niech $AH$ będzie wysokością, $BM$ – środkową, $CK$ – dwusieczną w trójkącie $ABC$ (rys. 3). Jeśli trójkąt $XYZ$ jest równoboczny, to z trójkąta $XHC$ mamy $\sphericalangle XCH = 30°$. Wtedy $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle XCH = 60°$. Z trójkąta $BYH$ mamy $\sphericalangle CBM = 30°$. Stąd $\sphericalangle BMC = 90°$, tzn. $BM$ jest jednocześnie środkową i wysokością w trójkącie $ABC$, a więc trójkąt $ABC$ jest równoramienny z kątem przy podstawie równym 60°. Wynika z tego, że trójkąt $ABC$ jest równoboczny, a więc punkty $X$, $Y$ i $Z$ pokrywają się. Sprzeczność.




Rys. 3