Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2002

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **425** (WT = 3,01) i **426** (WT = 1,21)
z numeru 9/2001

Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,68
Witold Bednarek	– Łódź	42,67
Michał Adamaszek	– Kęty	41,85
Jerzy Cisło	– Wrocław	39,87

Tomasz Wietecha już piąty raz przekracza próg czerdziestu czterech punktów!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **324** (WT = 1,72), **325** (WT = 2,62),
z numeru 10/2001

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	41,54
Aleksander Surma	– Myszków	38,98
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	38,90
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,74
Marek Wójcicki	– Szczecin	28,59

Zadania z matematyki nr 439, 440

Redaguje Marcin E. KUCZMA

439. Rozważamy graf skierowany o skończonym zbiorze wierzchołków V. Każde dwa różne punkty (wierzchołki) $v_1, v_2 \in V$ łączy co najwyżej jedna z dwóch zorientowanych krawędzi: $v_1 \to v_2$ lub $v_2 \to v_1$. Punkt w jest *osiągalny* z punktu v, jeśli startując z v można dotrzeć do w, idąc wzdłuż krawędzi grafu zgodnie z ich orientacją. Zbiór $Z \subset V$ jest *docelowy*, gdy spełnia warunki:
(i) z każdego punktu $v \in V$ jest osiągalny pewien punkt $z \in Z$;
(ii) z żadnego punktu $z \in Z$ nie jest osiągalny żaden inny punkt $z' \in Z$.
Udowodnić, że wszystkie zbiory docelowe są równoliczne.

440. Wyznaczyć największą wartość, jaką może mieć suma pól dwóch kół bez wspólnych punktów wewnętrznych, umieszczonych w kwadracie o boku długości 1.

Zadanie 440 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2001

Przypominamy treść zadań:

431. Każda z trzech grup studenckich liczy n osób. Każdy student jest zaprzyjaźniony z co najmniej $n+1$ osobami z dwóch grup poza tą, do której sam należy (przyjmujemy, że relacja zaprzyjaźnienia jest symetryczna). Wykazać, że istnieje co najmniej jedna trójka przyjaciół złożona ze studentów z trzech różnych grup.

432. Udowodnić, że dla $x \in (0; \pi/3)$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg}(\sin x) > x$.

431. Niech m będzie największą liczbą, dla której istnieje student A mający m przyjaciół $B_1, \ldots, B_m$ w *jednej* z dwóch grup (poza jego własną, którą nazwiemy grupą pierwszą); grupę, do której należą $B_1, \ldots, B_m$, nazwijmy grupą drugą. Student A jest zaprzyjaźniony z co najmniej jednym studentem C w grupie trzeciej (jeśli jest ich więcej, wybieramy jednego dowolnie).

Przyjmijmy, że student C jest zaprzyjaźniony z k studentami z grupy pierwszej oraz l studentami z grupy drugiej. W myśl warunku zadania, $k + l \ge n + 1$; a z maksymalności m wynika, że $k \le m$. Wobec tego $l \ge n - m + 1$. Zatem w l-osobowym gronie przyjaciół studenta C w grupie drugiej znajduje się co najmniej jeden spośród studentów $B_1, \ldots, B_m$. Wraz ze studentami A i C tworzy on trójkę, której istnienie mieliśmy wykazać.

432. Należy udowodnić, że funkcja
$$f(x) = \sin x - \operatorname{arc\,tg} x$$
przyjmuje w przedziale $(0; \frac{\pi}{3}\rangle$ wartości dodatnie.

Ponieważ $f(0) = 0$, wystarczy dowieść, że jej pochodna
$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x^2}$$
jest w tym przedziale dodatnia.

Korzystamy z nierówności $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$:
$$f'(x) > 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x^4}{2(1+x^2)} \ge 0$$
dla $x \in (0; 1\rangle$; w szczególności $f'(1) > 0$.

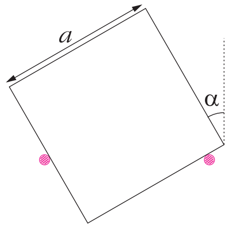
W przedziale $\langle 1; \frac{\pi}{3}\rangle$ funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest wypukła, więc f' jest funkcją wklęsłą, zatem przyjmuje swą najmniejszą wartość w jednym z końców tego przedziału. Skoro zaś $f'(1) > 0$ oraz
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \left(1 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)^{-1} > 0,$$
to
$$f'(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \left\langle 1; \frac{\pi}{3}\right\rangle$$
i dowód jest zakończony.

Zadania z fizyki nr 336, 337

Redaguje Jerzy B. BROJAN

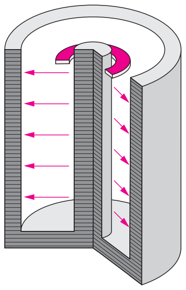
Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2002

336. Sześcian o boku a leży na dwóch równoległych i znajdujących się na tej samej wysokości poziomych prętach odległych wzajemnie także o a. W jakim zakresie kątów α (zob. rys. 1) sześcian może być w równowadze, jeśli współczynnik tarcia między prętami a sześcianem jest równy $\mu = 0{,}2$?



Rys. 1

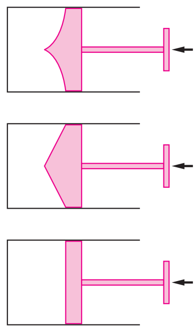
337. Magnes wytwarza w przestrzeni między wewnętrznym walcem (biegunem N) a zewnętrzną powłoką walcową (biegunem S) radialne pole magnetyczne (rys. 2), którego indukcja w odległości a od osi walca wynosi B_a; wartość ta jest niezależna od współrzędnej pionowej. Linie pola zamykają się od dołu (tzn. w zewnętrznej powłoce biegną w dół, a dalej do wewnątrz i wzdłuż wewnętrznego walca do góry). Jeśli w przestrzeni między biegunami spada swobodnie pierścień o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym b oraz grubości d, wykonany z niemagnetycznego metalu o gęstości ρ i przewodnictwie właściwym σ, to jaką prędkość osiągnie po długim czasie? Wariant nieco łatwiejszy: rozważyć cienki pierścień, tzn. b niewiele większe od a.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2001

Przypominamy treść zadań:



328. Trzy strzykawki (pompki) mają jednakową średnicę cylindra, ale różnią się kształtem tłoka (patrz rysunek obok). Jeśli na wszystkie tłoki działamy jednakowymi siłami, to w której strzykawce ciśnienie jest najwyższe, a w której – najniższe (czy też ciśnienie jest jednakowe)?

329. Układ optyczny (niekoniecznie pojedyncza soczewka) wytworzył w odległości 70 cm od przedmiotu rzeczywisty obraz odwrócony, powiększony 3 razy. Gdy umieszczono przedmiot o 2 cm bliżej układu, obraz oddalił się od układu o 30 cm. Podać możliwą budowę układu (przykładowe wartości parametrów soczewek i ich położenia). Ile wynosiło powiększenie obrazu przesuniętego?

Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, jeśli początkowa odległość obrazu od przedmiotu wynosiłaby 1 m (zamiast 70 cm), a pozostałe dane byłyby niezmienione?

328. Załóżmy, że we wszystkich strzykawkach przesunęliśmy tłok o ten sam odcinek Δx – zatem wykonaliśmy tę samą pracę $W = F\Delta x$. Dostarczona w ten sposób energia może zostać przekształcona np. w energię kinetyczną wytryskującej cieczy (lub gazu) albo odebrana przez naczynie połączone z wylotem strzykawki, w którym ciśnienie jest równe ciśnieniu w strzykawce. Ponieważ objętość wyrzuconej cieczy $\Delta V = S\Delta x$ (gdzie S – powierzchnia przekroju cylindra) jest jednakowa, więc z zasady zachowania energii wnioskujemy, że ciśnienie we wszystkich strzykawkach także ma jednakową wartość.

329. Nietrudno sprawdzić, że dla pojedynczej, cienkiej soczewki otrzymamy sprzeczny układ równań. W następnej próbie weźmy pod uwagę dwie identyczne cienkie soczewki o ogniskowej f odległe wzajemnie o d, przy czym pierwsza z nich jest odległa od przedmiotu o x. Stosując równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ do pierwszej soczewki, wyznaczamy położenie obrazu $y_1 = fx/(x-f)$ i jego powiększenie $p_1 = y_1/x = f/(x-f)$. Do równania drugiej soczewki podstawimy $x_2 = d - y_1$ i wyznaczamy położenie obrazu (jego odległość od drugiej soczewki oznaczymy po prostu y zamiast y_2) oraz powiększenie:

$$y = \frac{f(df - dx + fx)}{df - f^2 + 2fx - dx}, \qquad p_2 = \frac{y}{x_2},$$

$$p = -p_1 p_2 = \frac{f^2}{df - f^2 + 2fx - dx}.$$

Minus we wzorze na powiększenie wynika stąd, że dodatnie powiększenie przypisaliśmy obrazowi odwróconemu, a taki obraz powstanie, gdy jedna z soczewek da obraz odwrócony, a druga – prosty. Dalsze przekształcenia bardzo się uproszczą, jeśli odpowiednio dobierając parametry A i F, zapiszemy związek między x a y w postaci

$$(\star) \qquad \frac{1}{x+A} + \frac{1}{y+A} = \frac{1}{F}.$$

Znajdujemy

$$A = \frac{fd}{2f-d}, \qquad F = \frac{f^2}{2f-d},$$

a powiększenie okazuje się równe $p = (y+A)/(x+A)$. Po podstawieniu $p = 3$ wyznaczamy $x + A = (4/3)F$, $y + A = 4F$. Następnie z równania

$$\frac{1}{x+A-2\ \mathrm{cm}} + \frac{1}{y+A+30\ \mathrm{cm}} = \frac{1}{F}$$

obliczamy $F = 15$ cm, $x + A = 20$ cm, $y + A = 60$ cm. Szukane powiększenie obrazu przesuniętego wynosi $p' = (y + A + 30\ \mathrm{cm})/(x + A - 2\ \mathrm{cm}) = 5$. Jeśli chcemy ustalić wartości pozostałych parametrów, A, f i d, to skorzystajmy z danej odległości początkowej między przedmiotem a obrazem: $x + y + d = 70$ cm. Proste przekształcenia prowadzą do wyników

$A = \sqrt{1{,}5} \cdot 10\ \mathrm{cm} \approx 12{,}25$ cm,
$d = (2\sqrt{1{,}5} - 1) \cdot 10\ \mathrm{cm} \approx 14{,}49$ cm,
$f = (3 - \sqrt{1{,}5}) \cdot 10\ \mathrm{cm} \approx 17{,}75$ cm.

Dodajmy, że równanie ($\star$) ma ważną interpretację geometryczną: $x + A$ i $y + A$ są odległościami przedmiotu i obrazu od *płaszczyzn głównych* układu optycznego (zob. np. hasło *kardynalne punkty układu optycznego* w *Encyklopedii Fizyki*, PWN 1972), a F jest ogniskową układu. Równanie to jest słuszne dla dowolnego układu soczewek; z tego względu wyprowadzone z niego wnioski (wartości F i p') pozostaną w mocy w najogólniejszym przypadku – także wtedy, gdy początkowa odległość między przedmiotem a obrazem będzie równa 1 m. Przy tej wartości jednak układ dwóch jednakowych soczewek skupiających przestaje spełniać warunki zadania (otrzymalibyśmy $d^2 < 0$) i należy poszukać innego.