4/02 (52)

Γ $\lim\limits_{n\to\infty}$atias

O RÓWNYCH SUMACH DWÓCH BIKWADRATÓW

Istnieją liczby, które można przedstawić w postaci sumy dwóch bikwadratów (czyli czwartych potęg) na więcej niż jeden sposób. Oto „najmniejsze” rozwiązania (a,b,c,d) równania

$$a^4+b^4=c^4+d^4: \tag{44}$$

(158,59,134,133), (239,7,227,157), (292,193,257,256), (502,271,497,298), (542,103,514,359), (631,222,558,503), (1203,76,1176,653), (1381,878,1342,997), (2189,1324,1997,1784), (2461,1042,2141,2026).

Oczywiście uwzględniamy tylko rozwiązania pierwotne, tzn. spełniające warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d)=1$.

Równanie (44) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych, można bowiem podać rozwiązanie parametryczne:
$a=x^6y+3x^5y^2-2x^4y^3+x^2y^5+y^7$,
$b=x^7+x^5y^2-2x^3y^4-3x^2y^5+xy^6$,
$c=x^6y-3x^5y^2-2x^4y^3+x^2y^5+y^7$,
$d=x^7+x^5y^2-2x^3y^4+3x^2y^5+xy^6$.

Niestety, nie wiadomo, czy istnieją liczby reprezentowane w postaci sumy dwóch bikwadratów na więcej niż dwa sposoby. Na otarcie łez podajemy dwa przykłady trzech równych różnic bikwadratów:
$264047^4-1169^4=265076^4-93436^4=335084^4-296668^4$,
$401168^4-17228^4=415137^4-248289^4=$
$=421296^4-273588^4$.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (29′)

Wyjaśnienie oszustwa (29):

Usterka drobna: *pamiętaj kolego, nie dziel przez zero.* Takie dzielenie potencjalnie występuje w dowodzie nierówności Cauchy'ego, gdy $A=0$ lub $B=0$. Jeśli jednak $A=0$, to $a_n=0$ dla wszystkich n i nierówność przyjmuje postać $0\le 0$. Drobiazg, ale taka uwaga w porządnym dowodzie znaleźć się powinna. Identycznie w przypadku $B=0$.

Podobnie w dowodzie nierówności Minkowskiego dzielimy przez $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2}$, co może być zerem, ale wówczas dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$0\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2},$$

jest więc oczywiście prawdziwa.

Drobne niedomówienie.
Zapis $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ ma zawsze sens, gdy $c_n\ge 0$. Jeśli szereg jest rozbieżny, to jest rozbieżny do nieskończoności, więc można z sensem napisać $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=+\infty$. Jednak szeregi, które mogą mieć także wyrazy ujemne, nie muszą być ani zbieżne, ani rozbieżne do $+\infty$ lub $-\infty$. Tak więc napis $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ w nierówności Cauchy'ego wymaga pewnego wytłumaczenia. Można to uczynić na dwa sposoby.

Sposób I
Zakładamy w nierówności Cauchy'ego, że $a_n\ge 0$ i $b_n\ge 0$. Nierówność Minkowskiego dowodzimy najpierw dla $a_n\ge 0$ i $b_n\ge 0$, a następnie dla dowolnych a_n,b_n piszemy

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)^2}\le$$
$$\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}.$$

Sposób II
Dowodzimy nierówność Cauchy'ego najpierw dla $a_n,b_n\ge 0$, a następnie stwierdzamy, że przy dowolnych a_n,b_n z nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}$$

wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, która pociąga zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

Nie zaszkodziłoby też nadać sformułowaniu lematu następującej, precyzyjniejszej treści:

Dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych (a_n), (b_n), dla których sumy $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ są skończone, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}\,.$$

Usterka najpoważniejsza.
W dowodzie nierówności Minkowskiego wykonujemy dzielenie przez $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2}$, nie wiedząc nawet, czy ta suma jest skończona!!! Widać dwa sposoby naprawienia tego błędu.

Sposób I
Początkowo wszystkie sumy zastępujemy sumami skończonymi $\sum_{n=1}^{N}$. Otrzymujemy wówczas

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{N}a_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{N}b_n^2}\le$$
$$\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}$$

dla dowolnego N, skąd po przejściu z N do nieskończoności

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}\,.$$

Sposób II
Na początku dowodu nierówności Minkowskiego dowodzimy skończoności sumy $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$. Ponieważ nie zależy nam na dokładności oszacowań, szacujemy dość grubo, np. tak:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2\le\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)^2\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot\max(|a_n|,|b_n|))^2\le\sum_{n=1}^{\infty}(2|a_n|)^2+(2|b_n|)^2=$$
$$=4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)<+\infty.$$

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl