Twierdzenie 2. *Niech W będzie wielomianem, takim że dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W(x_0) = x_0$. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o własności $f(x) = f(W(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy f jest stała.*

Mamy więc połowiczny wynik, rozwiązanie danego równania funkcyjnego dla funkcji mających punkty stałe. Co jednak się dzieje, gdy punktów stałych nie ma? Odpowiedź znajduje się poniżej.

Rozwiążemy równanie $f(x) = f(W(x))$ dla wielomianu W nie mającego punktów stałych. Wykażemy, że wtedy zawsze istnieją niestałe funkcje ciągłe f o własności $f(x) = f(W(x))$.

Lemat 1. *Niech W będzie wielomianem o własnościach:*

1) *$W(x) = x$ nie ma rozwiązań;*
2) *dla pewnego x_0 jest $\inf_{x\in\mathbb{R}} W(x) = W(x_0)$.*

Wtedy $\inf_{x\in\mathbb{R}}(W(x) - x) = c > 0$ oraz dla każdego x $W^n(x)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do nieskończoności.

Dowód. Ponieważ z warunku 1) i 2) mamy, że $c > 0$ oraz $W(x) \geq x + c$, stąd natychmiast $W^n(x) \geq x + nc$.

Twierdzenie 3. *Niech W będzie wielomianem, takim, że $W(x) = x$ nie ma rozwiązań. Wtedy istnieje niestała funkcja ciągła o własności $f(x) = f(W(x))$, $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód twierdzenia przeprowadzimy, analizując dwa przypadki.

I. Załóżmy, że $W(x)$ jest wielomianem, takim, że dla pewnego $W(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}} W(x)$. Pochodna W jest wielomianem o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze. Ma ona skończenie wiele zer. Pomiędzy zerami pochodnej wielomian W rośnie lub maleje. Za ostatnim zerem swojej pochodnej W rośnie. Niech k będzie najmniejszym takim indeksem, że W na przedziale $[W^k(x_0), \infty)$ jest funkcją rosnącą (takie k zawsze istnieje, gdyż pochodna W ma skończoną ilość zer). Wtedy dla każdego m niemniejszego od k funkcja

$$W\colon\ [W^m(x_0), W^{m+1}(x_0)] \to [W^{m+1}(x_0), W^{m+2}(x_0)]$$

jest różnowartościowa i „na". Na przedziale $[W^k(x_0), W^{k+1}(x_0)]$ definiujemy f dowolnie, ale tak, by f była ciągła, niestała oraz $f(W^k(x_0)) = f(W^{k+1}(x_0))$. Rozszerzymy teraz definicję funkcji f na całą oś rzeczywistą. Należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1. Niech $z \in [W^m(x_0), W^{m+1}(x_0)]$ przy $m > k$. Wtedy istnieje $x \in [W^k(x_0), W^{k+1}(x_0)]$, takie że $z = W^{m-k}(x)$. Określamy $f(z) = f(x)$. Zauważmy, że f jest ciągła oraz $f(u) = f(W(u))$, $u \geq W^k(x_0)$. Skonstruowaliśmy zatem niestałą funkcję ciągłą na przedziale $[W^k(x_0), \infty)$ spełniającą podany warunek.

2. $x_0 \leq z < W^k(x_0)$, wtedy istnieje m, takie że $W^m(z) \geq W^k(x_0)$. Zauważmy, że dla każdego $p > m$, mamy $f(W^p(z)) = f(W^m(z))$. Określamy $f(z) = f(W^p(z))$, dostając dobrze zdefiniowaną funkcję niestałą spełniającą nasz warunek.

3. $z < x_0$. Tutaj $W(z) \geq x_0$, więc przyjmujemy $f(z) = f(W(z))$.

Zdefiniowaliśmy w ten sposób f na całej prostej.

II. Gdy funkcja ma maksimum zamiast minimum, rozważamy $W_1(x) = -W(-x)$ oraz $f_1(x) = f(-x)$ i rozumujemy jak w części I.

Za każdym razem potrafimy skonstruować niestałą funkcję ciągłą spełniającą warunki problemu, co prowadzi do wniosku: jeśli W nie ma punktu stałego, to istnieje niestała funkcja ciągła spełniająca zadane równanie.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 567. Obliczyć najkrótszą możliwą długość fali rentgenowskiego promieniowania hamowania, wytwarzanego przy napięciu przyspieszającym 120 kV.
Rozwiązanie na str. 1

F 568. Włókno żarówki jest wykonane ze stopu o oporze właściwym $2,5 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ i ma średnicę 0,1 mm. Obliczyć, jaka jest temperatura włókna po dłuższym czasie palenia się żarówki, jeśli ma ono własności ciała doskonale czarnego, a natężenie przepływającego prądu stałego wynosi 1,47 A.
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 982. Dany jest ułamek nieskracalny

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}.$$

Czy m dzieli się przez 5?
Rozwiązanie na str. 3

M 983. Udowodnić, że jeśli $p > 2$ jest liczbą pierwszą, to licznik ułamka nieskracalnego

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

jest podzielny przez p.
Rozwiązanie na str. 2

M 984. Udowodnić, że suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest liczbą naturalną dla żadnego naturalnego $n > 1$.
Rozwiązanie na str. 12