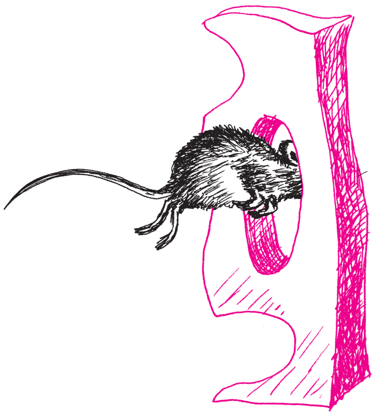
Paradoks na sobotę

Andrzej DRAGAN

Ostatnią sobotę spędziłem w dość nietypowy sposób. Otóż przyszedł mi do głowy pewien paradoks, który następnie starałem się rozwikłać. Na szczęście się udało, więc mogę już teraz z czystym sumieniem go przedstawić. Niewykluczone, że przy okazji dowiecie się kilku nowych rzeczy na temat mechaniki kwantowej, zatem przedstawiony eksperyment myślowy możecie potraktować jako okazję do przekonania się, jak prezentuje się ona w akcji.

Przejdźmy zatem do rzeczy. Chcę przedstawić rozumowanie prowadzące do wniosku, że można odróżnić makroskopowy obiekt (np. but) obrócony o 360° od nieobróconego. Z życia codziennego każdy wie, że po dokonaniu takiego obrotu naprawdę nic ciekawego się nie dzieje: wracamy do punktu wyjścia. Zatem z moim rozumowaniem coś musi być chyba nie tak.



Z drugiej strony wiadomo, że niektóre cząstki elementarne, na przykład elektrony, zachowują się w sposób bardziej skomplikowany niż buty (przynajmniej jeśli chodzi o pełne obroty). Elektron w formalizmie mechaniki kwantowej opisuje się przez pewien przestrzenny rozkład nazywany *funkcją falową*. Funkcja falowa, która stanowi kompletny opis stanu elektronu, ma wartości zespolone i następującą interpretację: kwadrat jej modułu określa rozkład prawdopodobieństwa znalezienia się elektronu w różnych punktach przestrzeni. Jest to najbardziej podstawowe znane prawo mechaniki kwantowej. Oznacza to, że nikt na świecie nie potrafi wyjaśnić go na gruncie bardziej podstawowym. Musicie więc przyjąć je „na wiarę” i już.

Zgodnie z formalizmem mechaniki kwantowej funkcja falowa obróconego elektronu równa jest minus funkcji falowej elektronu nieobróconego! Co prawda rozkład prawdopodobieństwa się nie zmienia (bo moduł $-x$ równa się modułowi x), jednak na pewno jest to coś niezwykle dziwnego. Ponadto zmiana znaku nie bierze się z „rozpędzania” i „wyhamowywania” elektronu podczas obrotu. Równie dobrze obserwator może obejść elektron dookoła. Efekt będzie ten sam! Dopóki jednak coś nie prowadzi do żadnych eksperymentalnych konsekwencji (przynajmniej w skali makroskopowej), nie powinna nas o to boleć głowa.

Omówmy teraz nieco bardziej szczegółowo kwantowomechaniczne prawo obliczania prawdopodobieństw. W postaci ogólnej jest ono takie: jeżeli chcemy znaleźć prawdopodobieństwo tego, że zajdzie jakiś określony proces, to najpierw musimy znaleźć amplitudę zajścia tego procesu, wziąć moduł i podnieść do kwadratu. Jeżeli natomiast zjawisko może zajść na dwa *nierozróżnialne* sposoby, to musimy najpierw obliczyć amplitudy dla obydwu procesów i następnie je dodać. Dopiero po dodaniu bierzemy moduł i podnosimy do kwadratu, otrzymując prawdopodobieństwo zajścia procesu na jeden z dwóch sposobów.

Rozpatrzmy przykład słynnego eksperymentu z podwójną szczeliną, w którym światło pada na przesłonę z dwiema malutkimi dziurkami (szczelinami). Za przesłoną znajduje się ekran, na którym obserwujemy światło przechodzące przez otwory. Ponieważ taki eksperyment jest świetnie opisany przez klasyczną teorię elektromagnetyzmu, posłużymy się najpierw tą teorią do obliczenia obrazu interferencyjnego. To, co musimy znaleźć, to rozkład natężenia światła na ekranie. W ustalonym punkcie $\mathbf{r}$ jest ono proporcjonalne do kwadratu pola elektrycznego w tym punkcie $\mathbf{E}^2(\mathbf{r})$. Natomiast pole elektryczne jest sumą pól pochodzących od fal elektromagnetycznych przechodzących przez obie szczeliny: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$. W wyniku interferencji pól za szczelinami, obraz na ekranie ma znany wszystkim „prążkowany” kształt.

Ten sam eksperyment można również opisać przy użyciu formalizmu mechaniki kwantowej. Ponieważ mamy tu właśnie do czynienia z sytuacją, w której fizyczny proces (dotarcie światła do ekranu) może zajść na dwa nierozróżnialne sposoby (nie wiemy, którą szczeliną dotarły fotony), będziemy mogli

Rozwiązanie zadania F 567.
Zgodnie z zasadą zachowania energii energia pojedynczego fotonu jest równa różnicy energii kinetycznych elektronu przed i po zahamowaniu, przy czym jej maksymalna wartość odpowiada całkowitemu zahamowaniu elektronu. Stąd

$$h\nu_0 = Ue,$$

gdzie Ue jest maksymalną energią kinetyczną straconą przez elektron podczas hamowania, a $\nu_0 = c/\lambda_0$ jest maksymalną częstotliwością emitowanego promieniowania, λ_0 zaś minimalną długością fali promieniowania. Stąd dostajemy:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{Ue} \approx 1 \cdot 10^{-11}\,\text{m}.$$

wykorzystać poznane przed chwilą prawo kwantowe. Wiemy, że każda wiązka materii czy światła padająca na przesłonę składa się z „kawałków” (cząstek, fotonów). To, co nas interesuje, to średnia liczba fotonów padających na ekran w punkcie $\mathbf{r}$ po przejściu przez szczeliny. Ta liczba jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa dojścia do tego punktu pojedynczego fotonu. Wiemy już, że jeśli $\Psi_1(\mathbf{r})$ i $\Psi_2(\mathbf{r})$ są amplitudami prawdopodobieństwa dojścia fotonu do punktu $\mathbf{r}$ na ekranie odpowiednio przez pierwszą i drugą szczelinę, to prawdopodobieństwo uderzenia cząstki w ekran w tym punkcie równa się $|\Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r})|^2$. Okazuje się, że po obliczeniu amplitud $\Psi_1(\mathbf{r})$ i $\Psi_2(\mathbf{r})$ otrzymuje się identyczny kształt obrazu interferencyjnego na ekranie, jak w przypadku klasycznym. W dodatku, eksperyment z podwójną szczeliną można przeprowadzić nie tylko na fotonach, ale również na elektronach i również widać będzie na ekranie prążki! W dalszej części skupimy się właśnie na przypadku elektronów ze względu na ich własności związane z obrotami o 360°.

Skomplikujmy teraz nieco nasz eksperyment. Powiedzmy, że elektrony zostały przed przepuszczeniem przez szczeliny przygotowane tak, że ich spiny są ustawione w jednakowy sposób, „w górę” wzdłuż osi z. Na potrzeby tego artykułu musicie tylko wiedzieć, że spin elektronu jest czymś podobnym do polaryzacji w przypadku fotonu (mówi się, że spin jest wewnętrznym momentem pędu elektronu; w każdym razie jest to coś, co „siedzi” wewnątrz elektronu i jest ustawione wzdłuż jakiegoś kierunku, trochę jak oś obrotu wirującej kulki). Oczywiście wynik eksperymentu się nie zmieni: wciąż na ekranie będą te same prążki, które były wcześniej. Możemy teraz do naszego układu dodać nowy element: tuż przed drugą szczeliną wstawimy „polaryzator spinowy”. Takie urządzenie również należy ustawić wzdłuż jakiegoś kierunku, a jego działanie jest następujące: jeśli wpadnie do niego elektron ze spinem ustawionym wzdłuż kierunku ustawienia polaryzatora, to jest on przepuszczany przez urządzenie „górnym” kanałem. Jeśli natomiast spin elektronu jest skierowany przeciwnie do kierunku ustawienia polaryzatora, to jest on przepuszczany „dolnym” kanałem. Jeśli więc użyjemy strumienia elektronów ustawionych „zgodnie”, to wszystkie przelecą górą, a jeśli „przeciwnie”, to wszystkie, bez wyjątku, polecą dołem. Ciekawe rzeczy zaczną się dziać, gdy ustawimy urządzenie „skośnie” do kierunku polaryzacji elektronów, na przykład pod kątem α. Poza dwoma szczególnymi przypadkami omówionymi przed chwilą, nie da się powiedzieć, którędy przejdzie elektron. Oznacza to, że istnieje amplituda prawdopodobieństwa przejścia górą oraz amplituda prawdopodobieństwa przejścia dołem (w pewnym sensie elektron przejdzie obydwoma kanałami jednocześnie!). W dodatku amplitudy te wyrażają się bardzo prostymi wzorami. Pierwsza z nich wynosi $\cos(\alpha/2)$. Możemy stąd obliczyć prawdopodobieństwo przejścia elektronu górnym kanałem, które równa się po prostu $\cos^2(\alpha/2)$. Czyli, jak należy się spodziewać, dla $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 360^\circ$ to prawdopodobieństwo wynosi 1, czyli elektron na pewno przejdzie „górą”. Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że *amplituda* przejścia przez polaryzator obrócony o pełny kąt równa się minus amplitudzie przejścia przez polaryzator nieobrócony. Na szczęście to, co nas interesuje, to prawdopodobieństwo, bo tylko to możemy zmierzyć w eksperymencie, zatem eksperymentalnie nie powinno się móc odróżnić polaryzatorów obróconych od nieobróconych, prawda? Jesteśmy już blisko sformułowania naszego paradoksu. Powiedzmy, że nasz polaryzator ustawiony jest tuż przed szczeliną w taki sposób, że elektrony przechodzące górnym kanałem są wpuszczane prosto do szczeliny, a lecące dolnym kanałem są kierowane w zupełnie innym kierunku, gdzieś w kosmos (zależy nam na tym, żeby w interferencji brały udział tylko elektrony przechodzące górą, ale nie chcemy sprawdzać, którymi kanałami podróżowały, żeby obie możliwości były „nierozróżnialne” przed uderzeniem elektronu w ekran). Powiedzmy, że polaryzator został ustawiony pod kątem $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 360^\circ$ do kierunku polaryzacji elektronów (wydawać by się mogło, że na jedno wychodzi). Wówczas amplituda prawdopodobieństwa dotarcia elektronu przez górny kanał polaryzatora do drugiej szczeliny wynosi 1 lub -1, a amplituda dojścia elektronu od tej szczeliny do punktu $\mathbf{r}$ na ekranie

Rozwiązanie zadania M 983.
Mamy

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{(p-1)/2} + \frac{1}{(p+1)/2}\right) =$$
$$= p\left[\frac{1}{1\cdot(p-1)} + \frac{1}{2\cdot(p-2)} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)/4}\right].$$

Suma w nawiasie kwadratowym przedstawiona w postaci ułamka nieskracalnego będzie miała mianownik niepodzielny przez p, a licznik jest jeszcze mnożony przez p.

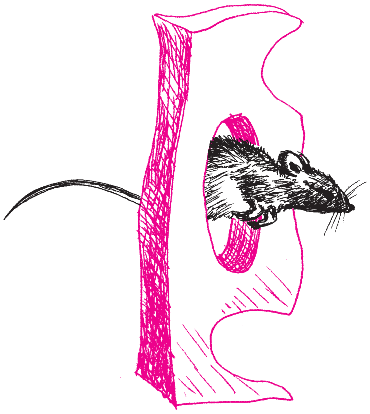
równa się $\Psi_2(\mathbf{r})$. Dla elektronu przechodzącego pierwszą szczeliną amplituda dotarcia do ekranu wynosi $\Psi_1(\mathbf{r})$. Skorzystamy teraz z drugiego ważnego prawa mechaniki kwantowej, mówiącego, że amplituda zajścia dowolnego procesu złożonego z pewnych „podprocesów” równa jest iloczynowi amplitud zajścia tych podprocesów. Podsumować to wszystko można jednym wzorem na prawdopodobieństwo $P_\alpha(\mathbf{r})$ tego, że elektron uderzy w ekran w ustalonym punkcie $\mathbf{r}$:

$$P_0(\mathbf{r}) = |\Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r})|^2, \tag{1}$$

gdy $\alpha = 0^o$, albo:

$$P_{360}(\mathbf{r}) = |\Psi_1(\mathbf{r}) - \Psi_2(\mathbf{r})|^2, \tag{2}$$

gdy $\alpha = 360^o$. I oto jest nasz paradoks. Wygląda na to, że rozkład prawdopodobieństwa zmieni się po obrocie polaryzatora! Jeżeli przyjmiemy, że $\Psi_1(\mathbf{r})$ i $\Psi_2(\mathbf{r})$ są falami kulistymi wychodzącymi ze szczelin, to okazuje się, że w pierwszym przypadku obraz na ekranie będzie kosinusoidalny, a w drugim sinusoidalny, czyli prążki interferencyjne się przesuną! Wynikałoby z tego, że patrząc na prążki możemy stwierdzić, czy polaryzator został obrócony. Ponieważ, w zasadzie, w eksperymencie można użyć elektronów o dowolnie dużej długości fali, to również polaryzatory mogą być dowolnie duże. Otworzyłoby to drogę do odróżniania obiektów makroskopowych odwróconych od nieodwróconych! Absurd!



Wszystkim proponuję teraz samodzielne zastanowienie się nad tym, gdzie tkwi błąd w przedstawionym rozumowaniu. Rozwiązanie podaję w następnym akapicie. Jak widzicie, nasz paradoks jest dobrym pretekstem do zastanowienia się nad podstawowymi prawami mechaniki kwantowej. Chyba więc warto się trochę powytężać, prawda?

Moje rozwiązanie jest następujące.
Po cichu założyliśmy, że amplituda dotarcia elektronu ze szczeliny do ekranu nie zależy od ustawienia polaryzatora. W rzeczywistości wcale tak nie jest. Amplituda ta bowiem zmienia znak po dokonaniu pełnego obrotu polaryzatora. Rzeczywiście, jeśli po obrocie $\Psi_2(\mathbf{r})$ przejdzie na $-\Psi_2(\mathbf{r})$, wszystko będzie się zgadzać i w obu przypadkach obraz interferencyjny na ekranie będzie identyczny.

A dlaczego amplituda zmienia znak? Heurystyczny argument jest taki, że elektron opuszczający obrócony polaryzator jest taki sam jak obrócony elektron opuszczający nieobrócony polaryzator (czyli o przeciwnym znaku funkcji falowej). Jednak ścisły dowód opiera się na rachunku operatorowym mechaniki kwantowej. Tym, którzy go znają, powinien więc wystarczyć argument, że „stan własny operatora spinu wzdłuż osi obróconej o 360^o, w którym znajduje się elektron opuszczający polaryzator górnym kanałem, ma przeciwny znak niż stan własny operatora nieobróconego”. Płynie stąd jeszcze jedna lekcja: tych bardzo podstawowych praw chyba nie rozumiemy na tyle dobrze, byśmy mogli opisać je zwykłym, klasycznym językiem. A być może jest to w ogóle niemożliwe?

Rozwiązanie zadania M 982.
Tak. Rozłóżmy naszą sumę na sumy częściowe

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\right)$$

i wykażemy, że każda suma w nawiasach ma w przedstawieniu w postaci ułamka nieskracalnego licznik podzielny przez 5. Mamy

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20} = \frac{5}{12}.$$

Poza tym dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy

$$\frac{1}{5k+1}+\frac{1}{5k+2}+\frac{1}{5k+3}+\frac{1}{5k+4} = \frac{(5k+2)(5k+3)(5k+4)+\ldots+(5k+1)(5k+2)(5k+3)}{(5k+1)\ldots(5k+4)} =$$

$$= \frac{5l_1+2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3}{5l_2+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{5l_1+50}{5l_2+24}.$$

Z powyższego wynika, że dla każdego z ułamków nieskracalnych w powyższym wzorze na $\frac{m}{n}$ licznik jest podzielny przez 5. Pozostaje zauważyć, że suma nieskracalnych ułamków z licznikami podzielnymi przez 5 jest znowu takim ułamkiem.