O pewnym równaniu funkcyjnym

Juliusz JABŁECKI

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2001 roku.

Kiedyś mój nauczyciel matematyki dał mi zadanie znalezienia funkcji ciągłych f o własności $f(x) = f(x^2)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Zadanie rozwiązałem i zacząłem się zastanawiać nad uogólnieniem problemu na dowolny wielomian. Moja praca była właśnie poświęcona zagadnieniu znalezienia funkcji ciągłych f o własności $f(x) = f(W(x))$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

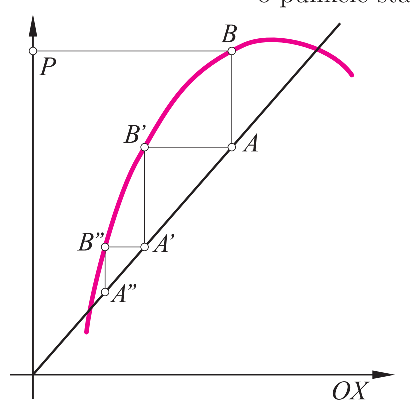
W całej pracy zakładać będziemy, że: $W(x) \neq \pm x + c$, $c \in \mathbb{R}$. W tych bowiem przypadkach dostajemy trywialne rozwiązania naszego równania w postaci funkcji parzystych i okresowych.

Do rozwiązania naszego równania przydatne będzie pojęcie iteracji wielomianu.

Definicja. Niech W będzie dowolnym wielomianem. Oznaczmy $W^1(x) = W(x)$, $W^2(x) = W(W(x)), \ldots,\ W^{n+1}(x) = W(W^n(x))$. $W^n(x)$ nazywać będziemy *n-tą iteracją* wielomianu W.

Twierdzenie 1. *Niech W będzie wielomianem, mającym punkt stały x_0, tzn. $x_0 \in \mathbb{R}$ o własności $W(x_0) = x_0$. Niech $c > 0$ będzie takie, że dla każdego $x \in (x_0, x_0 + c)$ zachodzi $W(x) > x$. Wtedy dla każdego $a_0 \in (x_0, x_0 + c)$ istnieje ciąg $\{a_n\}$, taki, że $x_0 \leq a_n \leq a_0$, $W^n(a_n) = a_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.*

Dowód. Weźmy dowolne $a_0 \in (x_0, x_0 + c)$ i rozważmy wielomian W na przedziale $[x_0, a_0]$. Ponieważ $W(x_0) = x_0$ oraz $W(a_0) > a_0$, więc z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że W musi przyjąć wartość a_0 na przedziale (x_0, a_0). Oznacza to, iż istnieje przynajmniej jedno $a_1 \in (x_0, a_0)$, takie, że $W(a_1) = a_0$. Dla a_1 mamy $W(a_1) > a_1$, więc z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje $a_2 \in (x_0, a_1)$, takie, że $W(a_2) = a_1$. Postępując tak dalej, otrzymamy ciąg a_n, taki, że $W(a_{n+1}) = a_n$. Ciąg a_n jest malejący i ograniczony z dołu przez x_0. Wnioskujemy stąd, że istnieje: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in [x_0, a_0]$. Wtedy też $\lim_{n\to\infty} W(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$. Ale wielomian jest funkcją ciągłą, więc $\lim_{n\to\infty} W(a_n) = W(\lim_{n\to\infty} a_n) = W(a)$. Zatem $W(a) = a$. Ponieważ jednak $W(x) > x$ dla $x \in (x_0, x_0 + c)$ i jedynym punktem stałym w przedziale $[x_0, x_0 + a_0]$ jest x_0, to mamy tezę.



$P = a_0$, $B = (a_1, a_0)$, $B' = (a_2, a_1)$, $B'' = (a_3, a_2)$, $A = (a_1, a_1)$, $A' = (a_2, a_2)$, $A'' = (a_3, a_3)$.

Mówiąc obrazowo, udowodniliśmy twierdzenie, które mówi, że przy założeniach twierdzenia 1 wsteczne iteracje danego punktu $a_0 \in (x_0, x_0 + c)$ zawsze doprowadzą nas do punktu stałego, będącego punktem przecięcia przekątnej układu z wykresem naszej funkcji (rysunek 1).

Wniosek 1.1. Niech W będzie wielomianem o dwóch punktach stałych $x_0, x_1 (x_0 < x_1)$, takim że $W(x) \neq x$ dla $x \in (x_0, x_1)$. Wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o własności $f(x) = f(W(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$, zachodzi $f(x) = f(x_0) = f(x_1)$ dla $x \in [x_0, x_1]$.

Dowód. Do rozpatrzenia są dwa przypadki:

1) $W(x) > x$ dla $x \in (x_0, x_1)$. Wtedy z twierdzenia 1 wynika, że dla dowolnego $x = a_0 \in (x_0, x_1)$ istnieje ciąg a_n zbieżny do x_0, taki że $W^n(a_n) = x$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mamy wobec powyższego $f(x) = f(W^n(a_n)) = f(a_n)$. Zatem z ciągłości

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x),$$

a więc $f(x) = f(x_0)$ dla $x \in [x_0, x_1)$ i również z ciągłości

$$f(x_1) = \lim_{x\to x_1^-} f(x) = f(x_0).$$

2) $W(x) < x$ dla $x \in (x_0, x_1)$. Wprowadzamy nowy przedział $[-x_1, -x_0]$, nową funkcję oraz nowy wielomian : $f_1(x) = f(-x)$, $W_1(x) = -W(-x)$. Zauważmy, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $f_1(W_1(x)) = f_1(x)$; ponadto $W_1(x) > x$ dla $x \in (-x_1, -x_0)$. Z punktu 1) wynika więc, że $f_1(x) = f_1(-x_1)$, $x \in [-x_1, -x_0]$, co oznacza, że dla $x \in [x_0, x_1]$ mamy

$$f(x) = f_1(-x) = f_1(-x_1) = f(x_1).$$

Wniosek 1.2. Niech W będzie wielomianem mającym $k + 1$ punktów stałych $x_0, x_1, \ldots, x_k$, oraz niech $x_0 < \ldots < x_k$. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i $f(x) = f(W(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f(x) = f(x_0)$ dla $x \in [x_0, x_k]$.

Wniosek 1.3. Niech W będzie wielomianem o punkcie stałym x_0. Załóżmy ponadto, że $W(x) > x$ dla $x > x_0$. Wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o własności $f(x) = f(W(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$, mamy $f(x) = f(x_0)$ dla $x \geq x_0$.

Wniosek 1.4. Niech W będzie wielomianem o punkcie stałym x_0. Załóżmy, że $W(x) < x$ dla $x > x_0$. Wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o własności $f(x) = f(W(x))$, dla $x \in \mathbb{R}$, mamy $f(x) = f(x_0)$ dla $x > x_0$.

Korzystając z powyższych wniosków, możemy udowodnić twierdzenie 2.

Twierdzenie 2. *Niech W będzie wielomianem, takim że dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W(x_0) = x_0$. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o własności $f(x) = f(W(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy f jest stała.*

Mamy więc połowiczny wynik, rozwiązanie danego równania funkcyjnego dla funkcji mających punkty stałe. Co jednak się dzieje, gdy punktów stałych nie ma? Odpowiedź znajduje się poniżej.

Rozwiążemy równanie $f(x) = f(W(x))$ dla wielomianu W nie mającego punktów stałych. Wykażemy, że wtedy zawsze istnieją niestałe funkcje ciągłe f o własności $f(x) = f(W(x))$.

Lemat 1. *Niech W będzie wielomianem o własnościach:*

1) $W(x) = x$ nie ma rozwiązań;
2) dla pewnego x_0 jest $\inf_{x\in\mathbb{R}} W(x) = W(x_0)$.

Wtedy $\inf_{x\in\mathbb{R}}(W(x) - x) = c > 0$ oraz dla każdego x $W^n(x)$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do nieskończoności.

Dowód. Ponieważ z warunku 1) i 2) mamy, że $c > 0$ oraz $W(x) \ge x + c$, stąd natychmiast $W^n(x) \ge x + nc$.

Twierdzenie 3. *Niech W będzie wielomianem, takim, że $W(x) = x$ nie ma rozwiązań. Wtedy istnieje niestała funkcja ciągła o własności $f(x) = f(W(x))$, $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód twierdzenia przeprowadzimy, analizując dwa przypadki.

I. Załóżmy, że $W(x)$ jest wielomianem, takim, że dla pewnego $W(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}} W(x)$. Pochodna W jest wielomianem o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze. Ma ona skończenie wiele zer. Pomiędzy zerami pochodnej wielomian W rośnie lub maleje. Za ostatnim zerem swojej pochodnej W rośnie. Niech k będzie najmniejszym takim indeksem, że W na przedziale $[W^k(x_0), \infty)$ jest funkcją rosnącą (takie k zawsze istnieje, gdyż pochodna W ma skończoną ilość zer). Wtedy dla każdego m niemniejszego od k funkcja

$$W\colon\ [W^m(x_0), W^{m+1}(x_0)] \to [W^{m+1}(x_0), W^{m+2}(x_0)]$$

jest różnowartościowa i „na”. Na przedziale $[W^k(x_0), W^{k+1}(x_0)]$ definiujemy f dowolnie, ale tak, by f była ciągła, niestała oraz $f(W^k(x_0)) = f(W^{k+1}(x_0))$. Rozszerzymy teraz definicję funkcji f na całą oś rzeczywistą. Należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1. Niech $z \in [W^m(x_0), W^{m+1}(x_0)]$ przy $m > k$. Wtedy istnieje $x \in [W^k(x_0), W^{k+1}(x_0)]$, takie że $z = W^{m-k}(x)$. Określamy $f(z) = f(x)$. Zauważmy, że f jest ciągła oraz $f(u) = f(W(u))$, $u \ge W^k(x_0)$. Skonstruowaliśmy zatem niestałą funkcję ciągłą na przedziale $[W^k(x_0), \infty)$ spełniającą podany warunek.

2. $x_0 \le z < W^k(x_0)$, wtedy istnieje m, takie że $W^m(z) \ge W^k(x_0)$. Zauważmy, że dla każdego $p > m$, mamy $f(W^p(z)) = f(W^m(z))$. Określamy $f(z) = f(W^p(z))$, dostając dobrze zdefiniowaną funkcję niestałą spełniającą nasz warunek.

3. $z < x_0$. Tutaj $W(z) \ge x_0$, więc przyjmujemy $f(z) = f(W(z))$.

Zdefiniowaliśmy w ten sposób f na całej prostej.

II. Gdy funkcja ma maksimum zamiast minimum, rozważamy $W_1(x) = -W(-x)$ oraz $f_1(x) = f(-x)$ i rozumujemy jak w części I.

Za każdym razem potrafimy skonstruować niestałą funkcję ciągłą spełniającą warunki problemu, co prowadzi do wniosku: jeśli W nie ma punktu stałego, to istnieje niestała funkcja ciągła spełniająca zadane równanie.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 567. Obliczyć najkrótszą możliwą długość fali rentgenowskiego promieniowania hamowania, wytwarzanego przy napięciu przyspieszającym 120 kV.
Rozwiązanie na str. 1

F 568. Włókno żarówki jest wykonane ze stopu o oporze właściwym $2,5 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ i ma średnicę 0,1 mm. Obliczyć, jaka jest temperatura włókna po dłuższym czasie palenia się żarówki, jeśli ma ono własności ciała doskonale czarnego, a natężenie przepływającego prądu stałego wynosi 1,47 A.
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 982. Dany jest ułamek nieskracalny

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}.$$

Czy m dzieli się przez 5?
Rozwiązanie na str. 3

M 983. Udowodnić, że jeśli $p > 2$ jest liczbą pierwszą, to licznik ułamka nieskracalnego

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

jest podzielny przez p.
Rozwiązanie na str. 2

M 984. Udowodnić, że suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest liczbą naturalną dla żadnego naturalnego $n > 1$.
Rozwiązanie na str. 12