Klub 44

$\otimes\sqrt{\int\!\!\!\sum !} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2002

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 437, 438

Redaguje Marcin E. KUCZMA

437. Liczba rzeczywista $a \geq 1$ oraz liczba zespolona z spełniają warunki $|z+a| \leq a$ oraz $|z^2+a| \leq a$. Dowieść, że $|z| \leq a$.

438. Wykazać, że jeżeli n jest liczbą naturalną, taką że $p = 8n+1$ jest liczbą pierwszą, to różnica $2^{4n}-1$ dzieli się przez p.

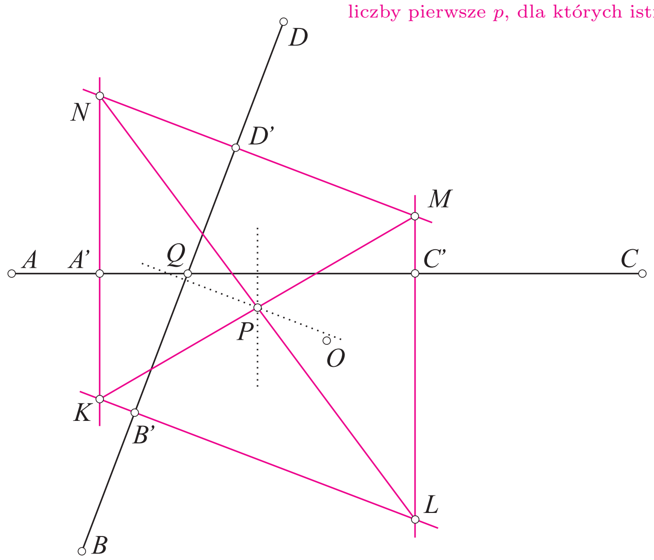
Zadanie **438** zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2001

Przypominamy treść zadań:

429. Przekątne czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg o środku O, przecinają się w punkcie Q. Punkty K, L, M, N są (kolejno) środkami okręgów opisanych na trójkątach QAB, QBC, QCD, QDA. Proste KM i LN przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

430. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją co najwyżej dwie dodatnie liczby całkowite n, dla których wartość wyrażenia $p \cdot 2^n + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieją dokładnie dwie takie liczby n.



429. Przez środki A', B', C', D' odcinków QA, QB, QC, QD prowadzimy symetralne tych odcinków. Przecinają się one kolejno parami w punktach K, L, M, N; czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Punkt P – środek symetrii owego równoległoboku – leży na symetralnej odcinka $A'C'$ oraz na symetralnej odcinka $B'D'$.

Czworokąt $A'B'C'D'$ jest obrazem czworokąta $ABCD$ w jednokładności o środku Q i skali 1/2. Obrazem punktu O, czyli środka okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, jest środek okręgu opisanego na czworokącie $A'B'C'D'$, czyli punkt przecięcia symetralnych odcinków $A'C'$ i $B'D'$ – czyli punkt P. To znaczy, że P jest środkiem odcinka OQ.

430. Przypuśćmy, że nieparzysta liczba $p \cdot 2^n + 1$ jest kwadratem pewnej liczby $2k+1$. Daje to równanie $p \cdot 2^n = 4k^2 + 4k$.

Dla $p = 2$ dostajemy $2^{n-1} = k(k+1)$, skąd $k = 1$, i wobec tego $n = 2$ jest jedynym wykładnikiem spełniającym zadany warunek.

Gdy p jest liczbą pierwszą nieparzystą, uzyskane równanie $p \cdot 2^{n-2} = k(k+1)$ może być spełnione tylko dla $n \geq 3$. Po prawej stronie czynniki k oraz $k+1$ są względnie pierwsze. Zatem jedna z liczb p oraz 2^{n-2} musi być równa k, a pozostała $k+1$. Liczba n musi spełniać równanie $2^{n-2} = p+1$ lub $2^{n-2} = p-1$; mamy więc (dla ustalonej liczby p) co najwyżej dwie możliwe wartości n.

Dokładnie dwie „dobre” liczby n istnieją wtedy, gdy zarówno $p+1$, jak $p-1$ są potęgami dwójki; to zaś ma miejsce jedynie dla $p = 3$. Dwie wartości n otrzymujemy jako rozwiązania równań $2^{n-2} = 3 \pm 1$: $n = 3$ oraz $n = 4$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 322 ($WT = 3{,}25$) i 323 ($WT = 2{,}20$)
z numeru 9/2001

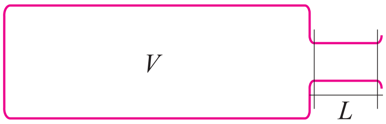
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	41,54
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	35,43
Tomasz Rudny	– Warszawa	29,50
Tomasz Wietecha	– Tarnów	28,70
Marek Wójcicki	– Szczecin	25,29

Zadania z fizyki nr 334, 335

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2002

334. Krasnoludki budują most o rozpiętości 5 piędzi posługując się przy tym kartami (cienkimi, sztywnymi i jednorodnymi płytkami prostokątnymi) o długości 1 piędzi i drugim boku znacznie krótszym. Kart się nie skleja i można je tylko układać jedna na drugiej. Ile wynosi minimalna liczba kart potrzebnych do tego, aby po moście mógł przejść krasnoludek o masie równej masie 2 kart? Nie ma potrzeby analizować trudności wynikłych w trakcie samej budowy – np. krasnoludki mogą użyć rusztowania, które usuną po zakończeniu pracy.

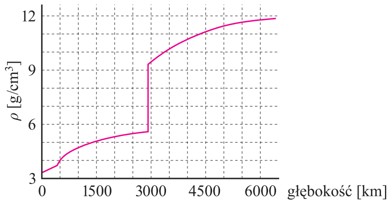


Rys. 1

335. Dmuchając w wylot butelki można spowodować wystąpienie dźwięku. Obliczyć przybliżoną wartość jego częstotliwości, jeśli dana jest objętość butelki V, wymiary szyjki (pole przekroju poprzecznego S, długość L – zob. rys. 1) oraz parametry powietrza (np. gęstość ρ, ciśnienie p i stosunek ciepeł właściwych $\gamma = c_p/c_v$, albo też prędkość dźwięku v).
Wskazówka: przyjąć, że powietrze w szyjce butelki jest „tłokiem”, który drgając spręża i rozpręża resztę powietrza w butelce.

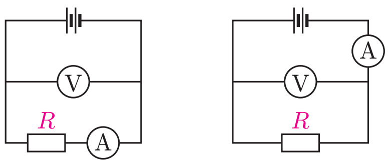
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2001

Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

326. Według szczególnej teorii względności związany układ ciał o masach $m_1, m_2, m_3 \ldots$ ma masę mniejszą od sumy tych mas o wielkość Δm równą $\Delta E/\mathrm{c}^2$, gdzie ΔE jest energią wiązania (energią, którą trzeba dostarczyć, aby rozbić układ na poszczególne ciała), a c – prędkością światła. O ile mniejsza jest masa Ziemi od sumy mas wszystkich jej części? W rachunku należy uwzględnić tylko wiązanie grawitacyjne. Dany jest wykres gęstości Ziemi w zależności od głębokości (rys. 2), promień Ziemi (którą uznajemy za kulę) $R = 6370$ km oraz wartość c i stałej grawitacji G (zob. w tablicach).



Rys. 3

327. Do dwóch jednakowych mikroamperomierzy o zakresie 200 μA dołączono odpowiednie oporniki szeregowo lub też równolegle, tworząc z jednego z nich miliamperomierz o zakresie 50 mA, a z drugiego – woltomierz o zakresie 20 V (rys. 3). W celu wyznaczenia nieznanego oporu R dokonano tymi przyrządami pomiaru napięcia i natężenia prądu w dwóch podanych obok obwodach. Iloraz U/I okazał się równy 450 Ω w jednym z obwodów, a 460 Ω w drugim. Ile wynosi wartość R?

326. Masa $\mathrm{d}M$ warstwy kulistej o małej grubości $\mathrm{d}r$ i średnim promieniu r wynosi $\mathrm{d}M = 4\pi r^2\rho(r)\mathrm{d}r$, a więc masa Ziemi zawarta wewnątrz kuli o promieniu r jest dana wzorem

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r')\mathrm{d}r'.$$

Jeśli, rozpoczynając od środka, będziemy „składać Ziemię” z warstw, to grawitacyjna energia wiązania każdej warstwy będzie wynosiła

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{G}M\mathrm{d}M}{r} = (4\pi)^2\mathrm{G}r\rho(r)\mathrm{d}r \int_0^r r'^2\rho(r')\mathrm{d}r'.$$

Całkowita energia wiązania jest zatem równa

$$\Delta E = (4\pi)^2\mathrm{G}\int_0^R r\rho(r)\int_0^r r'^2\rho(r')\mathrm{d}r'\mathrm{d}r.$$

Po odczytaniu na wykresie współrzędnych kilku–kilkunastu punktów wyliczenie wartości ΔE może być przeprowadzone na drodze czysto numerycznej (zwłaszcza przy dużej liczbie punktów), lub też na drodze całkowania analitycznego, przy założeniu „schodkowej” zależności $\rho(r)$ (zwłaszcza wtedy, gdy rozpatrujemy 2–3 przedziały, w których ρ jest stałe). W każdej z tych metod celowe byłoby sprawdzenie „po drodze”, czy całkowita masa Ziemi $M = \int \mathrm{d}M$ wychodzi zgodna z danymi tablicowymi, lub też – równoważnie – czy przyspieszenie grawitacyjne $g = \mathrm{G}M/R^2$ jest zgodne ze znaną wartością 9,81 m/s^2. W przypadku analitycznego całkowania najprostszym (ale najmniej dokładnym) założeniem jest przyjęcie stałej wartości ρ w całej objętości Ziemi; wtedy

$$\Delta E = \frac{1}{15}(4\pi\rho)^2\mathrm{G}R^5 = \frac{3\mathrm{G}M^2}{5R} = \frac{3g^2R^3}{5\mathrm{G}}.$$

Podstawienie danych liczbowych daje tu wartość $\Delta E = 2{,}24\cdot 10^{32}$ J. Jeśli przyjąć, że do głębokości 2900 km gęstość wynosi 4,5 g/cm^3 a głębiej – 10,75 g/cm^3 (takie liczby są zgodne ze znaną wartością g), to z rachunku analitycznego wynika $\Delta E = 2{,}42\cdot 10^{32}$ J. Wreszcie z obliczenia opartego na odczytaniu 17 punktów na wykresie i starannej analizie numerycznej autor otrzymał $\Delta E = 2{,}46\cdot 10^{32}$ J. Tej ostatniej wartości odpowiada niedobór masy

$$\Delta m = \Delta E/\mathrm{c}^2 = 2{,}74\cdot 10^{15}\ \mathrm{kg}$$

– dla porównania, jest to mniej niż jedna dwumiliardowa część masy Ziemi.

327. Na podstawie wymienionych danych można wyznaczyć opór własny woltomierza, utworzonego przez dołączenie szeregowego opornika do mikroamperomierza – ponieważ przy maksymalnym jego wskazaniu (20 V) płynie przez niego prąd 200 μA, więc

$$R_\mathrm{V} = 20\ \mathrm{V}/200\ \mu\mathrm{A} = 100\ \mathrm{k}\Omega.$$

Oporu mikroamperomierza wyznaczyć natomiast nie można (nie znamy oporu wyjściowego mikroamperomierza), a zatem skorzystajmy z wyników pomiarów dla prawego obwodu, gdzie opór ten nie ma znaczenia. W tym obwodzie otrzymano zaniżoną wartość U/I (czyli 450 Ω), gdyż amperomierz wskazuje sumę natężeń prądów płynących przez opornik i woltomierz. Stąd

$$\frac{1}{450\ \Omega} = \frac{1}{R_\mathrm{V}} + \frac{1}{R}.$$

Po podstawieniu wyznaczonej powyżej wartości R_V obliczamy $R = 452{,}0$ Ω.