Zadanie Czebyszewa

Ernest NIEZNAJ

W kilku zbiorach zadań do rachunku prawdopodobieństwa pojawia się następujący problem.

Zadanie Czebyszewa: Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany ułamek właściwy jest nieskracalny.

Z pozoru wydaje się to trudne, gdyż żeby mówić o prawdopodobieństwie, powinniśmy mieć pewną przestrzeń probabilistyczną. Tu jej jednak sensownie zbudować się nie da, ponieważ każdemu ułamkowi trzeba by przypisać prawdopodobieństwo zero, gdyż jest ich nieskończenie wiele.

Z drugiej strony na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba z ciągu kolejnych liczb naturalnych będzie podzielna przez 2 lub przez 3, niemal każdy zapytany da odpowiedź: 2/3. Być może zatem w naszym głównym problemie pozostaje ustawić ułamki w pewien określony sposób, zliczyć nieskracalne i znaleźć granicę, do jakiej dąży częstość ich występowania, gdy liczbę wszystkich ułamków zwiększamy do nieskończoności. Zapewne o to chodziło Czebyszewowi.

Rozwiązanie (własne): Na początek przeprowadzimy obliczenia bez ułamka $\frac{1}{1}$. Ustalmy liczbę naturalną n dostatecznie dużą i wypiszmy wszystkie ułamki właściwe w następujący sposób:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

Widać, że liczba ułamków właściwych o mianowniku niewiększym od n jest równa:

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aby zliczyć te ułamki, które są nieskracalne, potrzebujemy funkcji Eulera φ, której wartość $\varphi(m)$ to ilość liczb względnie pierwszych z m i niewiększych od m, gdzie m jest liczbą naturalną. Zgodnie z definicją

– ułamków nieskracalnych z 2 w mianowniku jest $\varphi(2)$,
– ułamków nieskracalnych z 3 w mianowniku jest $\varphi(3)$,
. . . .
– ułamków nieskracalnych z n w mianowniku jest $\varphi(n)$.

Zatem ułamków nieskracalnych o mianowniku niewiększym od n jest

$$K(n) = \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n).$$

Nasz problem sprowadza się więc do wyznaczenia granicy $\frac{K(n)}{N}$, kiedy $n \longrightarrow \infty$. Skorzystamy teraz z pewnego twierdzenia o funkcji Eulera (znaleźć je można w książce Władysława Narkiewicza „Teoria liczb”, Warszawa 1990, BM tom 50).

Twierdzenie: Przy $x \geq 2$ mamy

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} \cdot x^2 + f(x),$$

gdzie f jest pewną funkcją, taką że $\frac{f(x)}{x \log x} \longrightarrow c$ dla pewnej stałej c.

Zatem

$$\frac{K(n)}{N} = \frac{6}{\pi^2} \frac{n^2}{n(n-1)} + \frac{2f(n)}{n(n-1)} \longrightarrow \frac{6}{\pi^2}, \qquad \text{gdy} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Ostatecznie otrzymujemy nasze prawdopodobieństwo. Zauważmy jeszcze jedną rzecz. Mianowicie jeśli przyjmiemy dodatkowo, że ułamki nieskracalne wybieramy z naszego zbioru ułamków zwykłych powiększonego o 1 (czyli o ułamki postaci $\frac{m}{m}, m = 1, \ldots, n$), to wtedy byłoby $N = \frac{n(n+1)}{2}$ i prawdopodobieństwo by się nie zmieniło.

Zatem możemy sformułować „nowe” zadanie: Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dwie losowo wybrane liczby naturalne są względnie pierwsze.

Oczywiście odpowiedź otrzymujemy natychmiast z tego, co powiedzieliśmy wyżej, czyli $\frac{6}{\pi^2}$.

Zadanie Czebyszewa można znaleźć w zbiorze zadań A.M. Jagłom, I.M. Jagłom, *Nieelemientarnyje zadaczi w elemientarnom izłożenii*, Moskwa 1954. Rozwiązanie tam przedstawione jest inne niż tutaj. Autorzy korzystają z zasady włączeń i wyłączeń. Możemy je również znaleźć w książce „Okruchy matematyki” J. Górnickiego, z tym że bez rozwiązania. Podana jest tylko odpowiedź: $\frac{1}{\zeta(2)}$. Funkcja ζ nie pojawia się tutaj przypadkowo. Zainteresowanych odsyłam do rosyjskiego zbioru zadań.

Drobiazgi

Każdy widzi, że na płaszczyźnie z danym kołem stykać się może najwyżej 6 takich samych kół. Odrobinę wyobraźni wymaga spostrzeżenie, że w przestrzeni z daną kulą stykać się może 12 innych kul o tym samym promieniu. Więcej też nie może. Nikt nie wie natomiast, ile co najwyżej identycznych kul może się stykać z kulą o tym samym promieniu w przestrzeni 4–wymiarowej. Wiadomo tylko, że 24 mogą, a 26 już nie.

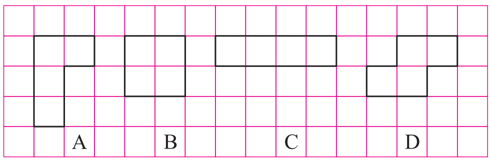
Dla danej liczby naturalnej n niech $s(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n różnych od n. Jeżeli dla dwóch liczb naturalnych n i m zachodzi: $s(n) = m$ oraz $s(m) = n$, to liczby n i m nazywamy zaprzyjaźnionymi. Zaprzyjaźnione są np. liczby 220 i 284, a także 12285 i 14595. Do dziś nie wiadomo, czy jakaś liczba parzysta jest zaprzyjaźniona z jakąś liczbą nieparzystą.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 979. Pokazać, że szachownicę 8×8 można pokryć 21 klockami 3×1 i jednym klockiem 1×1. Znaleźć wszystkie miejsca, w których przy takim pokryciu może znajdować się klocek 1×1.
Rozwiązanie na str. 2

W ostatnich dwóch zadaniach operujemy następującymi typami klocków:



M 980. Czy szachownicę 8×8 można pokryć 15 klockami typu A i jednym klockiem typu B?
Rozwiązanie na str. 13

M 981. Czy szachownicę 8×8 można pokryć jednym klockiem typu B i 15 klockami, z których każdy jest typu C lub D?
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 565. Narysować schemat układu przełączającego, umożliwiającego zamianę baterii kondensatorów połączonych równolegle w baterię kondensatorów połączonych szeregowo i odwrotnie.
Rozwiązanie na str. 3

F 566. Kilka jednakowych kondensatorów połączono równolegle i naładowano do różnicy potencjałów φ_0. Następnie za pomocą przełącznika połączono je szeregowo. Określić różnicę potencjałów między skrajnymi okładkami tej baterii. Czy wskutek przełączenia energia układu uległa zmianie?
Rozwiązanie na str. 4