2/02 (50)

Γ-limatias

Niech (a_n) będzie ciągiem określonym wzorem $a_n = \left[\frac{10^n}{n}\right]$. Oto ciekawe własności tego ciągu.

1. Posługujemy się systemem o podstawie $a_1 = 10$.
2. Γ-limatias ukazuje się po raz $a_2 = 50$.
3. *Delta* ma numer $a_3 = 333$.
4. Kwadrat numeru Γ-limatiasu jest równy $a_4 = 2500$.
5. Dla prawie każdej liczby pierwszej p liczba a_p jest zakończona zerem. Wyjątki: $a_3 = 333$ i $a_7 = 1428571$.
6. Dla prawie każdej liczby pierwszej p liczba a_p dzieli się przez 9 (wyjątki: $p = 2, 5, 7$) oraz przez 11 (wyjątki: $p = 2, 3, 5, 7, 11$).
7. Dla prawie każdej liczby pierwszej p dającej przy dzieleniu przez 6 resztę 1, liczba a_p dzieli się przez 7, 13 i 37. Wyjątki: liczba $a_7 = 1428571$ jest pierwsza, a_{13} nie dzieli się przez 13, a_{37} nie dzieli się przez 37.
7. Dla prawie każdej liczby pierwszej p liczba a_{2p} dzieli się przez a_p. Wyjątki: wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 50 oprócz 2 i 5.
8. Dla prawie każdej liczby pierwszej p liczba a_{3p} dzieli się przez a_p. Wyjątki: wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 333 oprócz 3.

O RÓWNYCH SUMACH DWÓCH KWADRATÓW

Liczba **50** jest najmniejszą liczbą rozkładającą się na sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich na dwa sposoby, mamy bowiem $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$. Z tej okazji zajmiemy się równymi sumami dwóch kwadratów.

O rozkładzie liczb na sumy dwóch kwadratów wiadomo właściwie wszystko.

Niech dana będzie liczba naturalna n, której rozkład na czynniki pierwsze wygląda następująco:

$$n = 2^r p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \ldots q_l^{t_l},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi dającymi przy dzieleniu przez 4 resztę 1, $q_1, q_2, \ldots, q_l$ są różnymi liczbami pierwszymi dającymi przy dzieleniu przez 4 resztę 3, a wszystkie wykładniki $s_1, s_2, \ldots, s_k, t_1, t_2, \ldots, t_l$ są dodatnie. Wówczas liczba n daje się przedstawić jako suma kwadratów dwóch liczb całkowitych nieujemnych wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wykładniki $t_1, t_2, \ldots, t_l$ są parzyste. Liczba takich przedstawień jest równa

$$\left[\frac{(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_k+1)+1}{2}\right].$$

Z powyższego wzoru wynika, że istnieją liczby mające dowolnie wiele rozkładów na sumę dwóch kwadratów.

Najmniejszą liczbą, która dopuszcza 2 przedstawienia, jest 25. Jednakże $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$, więc przedstawienie w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych **dodatnich** jest tylko jedno.

Trzy równe sumy kwadratów otrzymujemy po raz pierwszy dla liczby

$$325 = 5^2 \cdot 13 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 6^2 = 15^2 + 10^2\ ,$$

a cztery dla

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 33^2 + 4^2 = \\ = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2\ .$$

Dla liczby $4225 = 5^2 \cdot 13^2$ mamy 5 rozkładów, z czego 4 w liczbach dodatnich:

$$65^2 + 0^2 = 63^2 + 16^2 = 60^2 + 25^2 = 56^2 + 33^2 = 52^2 + 39^2\ .$$

Kolejne rekordy liczby rozkładów biją liczby podane w tabeli.

$5525 = 5^2 \cdot 13 \cdot 17$	6
$27625 = 5^3 \cdot 13 \cdot 17$	8
$71825 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17$	9
$138125 = 5^4 \cdot 13 \cdot 17$	10
$160225 = 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29$	12
$801125 = 5^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29$	16
$2082925 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29$	18
$4005625 = 5^4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29$	20
$5928325 = 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$	24
$29641625 = 5^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$	32
$77068225 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$	36
$148208125 = 5^4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$	40
$243061325 = 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41$	48

Sto równych sum dwóch kwadratów otrzymujemy po raz pierwszy dla liczby

$$53716552825 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41,$$

która ma 108 rozkładów.

Na przykładzie tej ostatniej liczby podamy wskazówkę, jak znajdować rozkłady liczby na sumę dwóch kwadratów.

Każdy czynnik pierwszy (postaci $4m+1$) rozkładamy na sumę dwóch kwadratów (można to zrobić w sposób jednoznaczny), a z rozkładów tych tworzymy liczby zespolone. Liczbie $p = a^2 + b^2$, gdzie dla ustalenia uwagi $a > b$, przypisujemy liczbę zespoloną $z_p = a + bi$. W naszym przypadku otrzymujemy:

$$z_5 = 2 + i, \qquad z_{29} = 5 + 2i,$$
$$z_{13} = 3 + 2i, \qquad z_{37} = 6 + i,$$
$$z_{17} = 4 + i, \qquad z_{41} = 5 + 4i.$$

Każdy czynnik pierwszy p w iloczynie

$$n = 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41$$

zastępujemy przez z_p lub $\overline{z_p}$. W ten sposób możemy otrzymać 216 różnych iloczynów dających 216 różnych liczb zespolonych o module $\sqrt{n}$.

Te liczby łączą się w 108 par liczb zespolonych sprzężonych, a każda taka para $a \pm bi$ daje rozkład liczby n na sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych, a mianowicie $a^2 + b^2$.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl