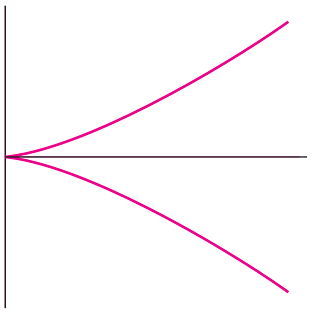
Krzywe i węzły

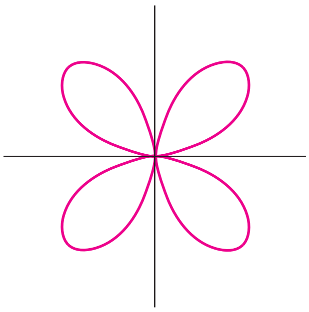
Tadeusz KRASIŃSKI

Krzywą definiujemy jako zbiór punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o współrzędnych (x, y) spełniających równanie $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem dwóch zmiennych. Oto przykłady:

1. $y^2 - x^2 = 0$ (dwie proste o równaniach $y = x$ i $y = -x$),
2. $y^2 + x^2 = 0$ (jeden punkt $(0, 0)$, początek układu współrzędnych),
3. $y^2 + x^2 - 1 = 0$ (okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1),
4. $y^2 + x^2 + 1 = 0$ (zbiór pusty),
5. $y^2 - x^3 = 0$ (parabola półsześcienna, rysunek L),
6. $(y^2 + x^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ (czterolistna koniczynka, rysunek P).



L



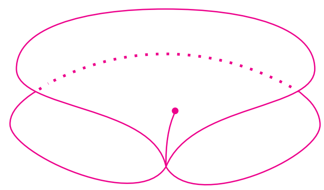
P

Te proste przykłady pokazują różnorodność tworów geometrycznych opisanych równaniem wielomianowym $F(x, y) = 0$. Okazuje się, że ta różnorodność znacznie się zmniejsza, gdy oprócz punktów (x, y) o współrzędnych rzeczywistych spełniających równanie $F(x, y) = 0$ rozważymy również punkty (z, w) o współrzędnych zespolonych spełniających to samo równanie, tzn. punkty $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$, gdzie x_1, x_2, y_1, y_2 są liczbami rzeczywistymi a i jednostką urojoną, dla których $F(z, w) = 0$ (zbiory takie nazywamy krzywymi zespolonymi). Działania na liczbach zespolonych wykonujemy dokładnie tak samo jak na rzeczywistych, należy tylko pamiętać, że $i^2 = -1$. Wówczas np. równania $z^2 - w^2 = 0$ i $z^2 + w^2 = 0$, opisujące tak różnorodne twory geometryczne w $\mathbb{R}^2$, przedstawiają podobne struktury geometryczne, bo

$$z^2 - w^2 = (z - w)(z + w),$$
$$z^2 + w^2 = (z - iw)(z + iw).$$

W obu przypadkach zbiorami rozwiązań są dwie płaszczyzny zespolone ($z = w$ i $z = -w$ w pierwszym przypadku oraz $z = iw$ i $z = -iw$ w drugim przypadku).

Punkty zespolone $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ możemy interpretować jako punkty przestrzeni czterowymiarowej, gdyż każdemu punktowi zespolonemu $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować punkt (x_1, x_2, y_1, y_2) przestrzeni czterowymiarowej (będziemy ją oznaczać $\mathbb{R}^4$). Wówczas każda krzywa zespolona $F(z, w) = 0$, już jako twór geometryczny w $\mathbb{R}^4$, jest powierzchnią dwuwymiarową, która może mieć tylko pojedyncze punkty osobliwe. Natychmiast powstaje pytanie, jakie kształty mają te powierzchnie. Odpowiedź nie jest łatwa, gdyż powierzchnie te (a więc twory geometryczne dwuwymiarowe) leżą w przestrzeni czterowymiarowej. Na przykład krzywa zespolona $z^2 - w^2 = 0$ (i podobnie $z^2 + w^2 = 0$) jest sumą dwóch płaszczyzn przecinających się tylko w jednym punkcie (ten punkt jest właśnie jedynym punktem osobliwym tej krzywej). Niestety, nie da się tego narysować w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$. Podobnie krzywa zespolona $z^2 - w^3 = 0$ ma tylko jeden punkt osobliwy $(0, 0)$ i jeśli dopuścimy na rysunku samoprzecięcia, których ona w przestrzeni czterowymiarowej w istocie nie ma, to będzie ona miała w pobliżu tego punktu osobliwego kształt przedstawiony na rysunku poniżej.

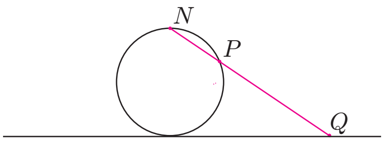


Istnieje jednak pewien sposób geometrycznego i wiernego przedstawienia kształtu tej powierzchni w pobliżu danego jej punktu. Oczywiście najciekawszy będzie przypadek, gdy punkt ten będzie punktem osobliwym powierzchni, gdyż w przypadku punktu nieosobliwego kształt powierzchni w jego pobliżu nie jest ciekawy – jest to po prostu kawałek gładkiej powierzchni. Przejdźmy zatem do opisu tego przedstawienia.

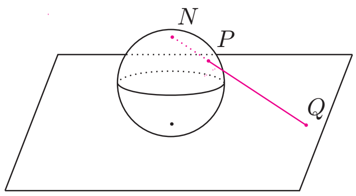
Jak wyjaśniliśmy powyżej, krzywe zespolone $F(z, w) = 0$ w naszej interpretacji leżą w przestrzeni czterowymiarowej $\mathbb{R}^4$. Załóżmy dla uproszczenia, że krzywa ta przechodzi przez początek układu współrzędnych, tzn. $F(0, 0) = 0$. Rozważmy teraz w $\mathbb{R}^4$ sferę trójwymiarową S_r^3 o środku w początku układu współrzędnych i dostatecznie małym promieniu r, określoną równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2.$$

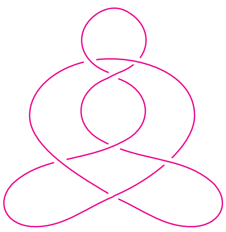
Jest to twór analogiczny do okręgu na płaszczyźnie (o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$) i sfery w przestrzeni (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$). Sfera S_r^3 jest obiektem trójwymiarowym i może być zinterpretowana jako zwykła przestrzeń trójwymiarowa $\mathbb{R}^3$ z dołączonym jednym dodatkowym punktem (oznaczanym przez ∞), tzn. $S_r^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Ponownie możemy to sobie wyobrazić poprzez analogię z przypadkiem okręgu i sfery. Mianowicie, okrąg można przedstawić sobie jako prostą z dołączonym jednym punktem (tę odpowiedniość dobrze oddaje rzut stereograficzny, patrz rysunek poniżej),



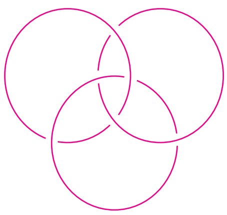
który każdemu punktowi P okręgu (z wyjątkiem bieguna N) przyporządkowuje punkt Q na prostej, a biegunowi N ten dodatkowy punkt ∞. Podobnie sferę dwuwymiarową możemy zinterpretować jako płaszczyznę z dołączonym jednym punktem (również tutaj można tę odpowiedniość zilustrować rzutem stereograficznym).



Zatem jeśli krzywą zespoloną $F(z,w)=0$, a dokładniej odpowiadającą jej powierzchnię w $\mathbb{R}^4$ przetniemy sferą S^3_r, to ślad tego przecięcia możemy w sposób wierny narysować (przedstawić) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (bo zawsze możemy zmienić układ współrzędnych w $\mathbb{R}^4$ tak, że przecięcie to nie będzie przechodziło przez punkt ∞ w $S^3_r = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$). Okazuje się, że jeśli tylko promień r tej sfery jest dostatecznie mały, to przecięcie to jest zapętlonym okręgiem w $\mathbb{R}^3$ (takie obiekty nazywamy węzłami) lub skończoną sumą zapętlonych rozłącznych okręgów (takie obiekty nazywamy splotami).

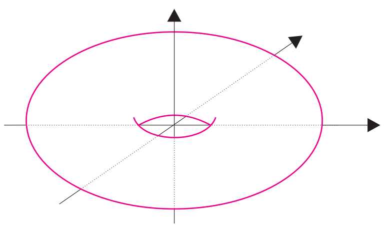


węzeł

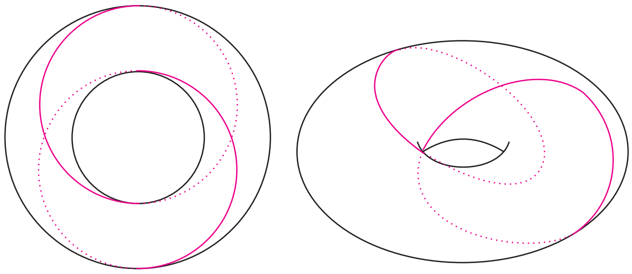


splot

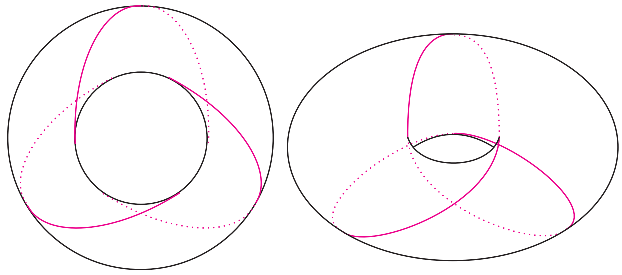
Co więcej, kształt tych węzłów lub splotów nie zależy od wyboru promienia r (o ile jest on dostatecznie mały). Można wykazać, że przez odpowiednią zmianę współrzędnych w $\mathbb{R}^4$ możemy zawsze uzyskać to, że te węzły lub sploty będą leżały w pełnym torusie w $\mathbb{R}^3$.



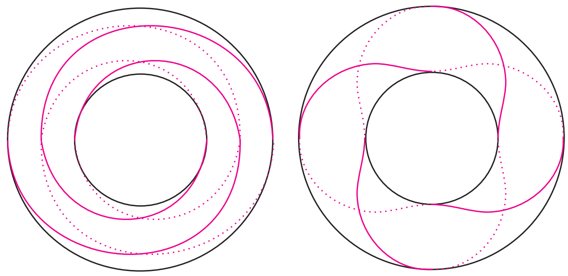
Na przykład, ślad krzywej zespolonej $z^2 + w^2 = 0$ (a także $z^2 - w^2 = 0$) w S^3_r to splot złożony z dwóch okręgów leżących na powierzchni torusa.



Ślad krzywej $z^2 - w^3 = 0$ to węzeł leżący na powierzchni torusa i obiegający tę powierzchnię 2-krotnie wzdłuż i 3-krotnie wokół osi tego torusa.



Ślad czterolistnej koniczynki to splot czterech okręgów, z których jedna para leży na powierzchni torusa, a druga na powierzchni torusa zawartego w pierwszym. Na zewnętrznym torusie każdy z dwóch okręgów obiega tę powierzchnię dwa razy wzdłuż i raz wokół, na wewnętrznym zaś odwrotnie: każdy z dwóch okręgów obiega tę powierzchnię raz wzdłuż i dwa razy wokół.



Jeśli w sposób ciągły (bez rozrywania i sklejania) zdeformujemy ten splot czterech okręgów i zrezygnujemy z narysowania torusów, to otrzymamy splot przedstawiony na rysunku poniżej.