Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2002

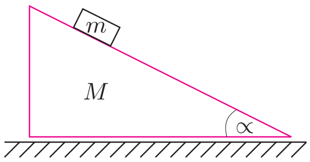
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

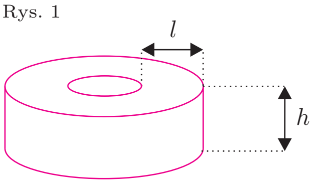
Zadania z fizyki nr 330, 331

Redaguje Jerzy B. BROJAN

330. Równię pochyłą o masie M i kącie nachylenia α postawiono na poziomym stole, a na równi położono na pewnej ustalonej wysokości h ciało o masie m (rys. 1). Jeśli na żadnej powierzchni nie występuje tarcie, to czy można tak dobrać parametry równi (M i α), aby ciało w chwili zsunięcia się z równi miało dowolnie małą prędkość względem ziemi, czy też istnieje jakieś ograniczenie od dołu na tę prędkość?



Rys. 1



Rys. 2

331. Aby zmniejszyć natężenie prądów wirowych w rdzeniu transformatorów (czyli zmniejszyć straty energii), rdzenie te wykonuje się z izolowanych blaszek żelaznych zamiast z litej masy żelaza. W przypadku autotransformatora rdzeń ma kształt toroidalny o przekroju prostokątnym (rys. 2). Jaki sposób zestawienia blaszek jest najlepszy:

a) ułożenie w stos płaskich kółek z dziurką,
b) zwinięcie w rulon długiej taśmy o szerokości h,
c) złożenie rdzenia z prostokątnych płytek o wymiarach $l \times h$?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2001

Przypominamy treść zadań:

322. Na obracającej się ze stałą prędkością kątową ω_0 poziomej ośce osadzono ciało (wahadło), które może się wokół niej obracać, przy czym moment sił tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości poślizgu i jest równy maksymalnemu momentowi tarcia statycznego. Moment ten ma wartość $M_t = 1$ N·m, moment bezwładności wahadła względem osi obrotu $I = 1{,}5$ kg·m^2, a maksymalny moment siły ciężkości (równy iloczynowi ciężaru wahadła przez odległość jego środka masy od osi obrotu) $M_g = 1{,}5$ N·m. W chwili początkowej nadano wahadłu dużą prędkość kątową zgodną ze zwrotem ω_0. Dla jakich wartości ω_0 wahadło po długim czasie będzie się obracać, a dla jakich – wykonywać drgania wokół pewnego położenia równowagi? Poza konkursem: Jaka jest odpowiedź dla przypadku, kiedy $M_g = 2$ N·m, a pozostałe dane są niezmienione?

323. Żarówka o mocy nominalnej 15 W jest dostosowana do napięcia 10 V. Ile ogniw o SEM równej 1,5 V i oporze wewnętrznym 2 Ω trzeba wziąć i jak je połączyć, aby napięcie na żarówce było co najmniej równe nominalnemu?

322. Jeżeli początkowa prędkość kątowa jest duża, to ze względu na tarcie wahadło będzie zwalniać, aż na pewien czas dojdzie do spoczynku względem osi. Ze względu na nierówność $M_t < M_g$ wahadło może pozostawać w spoczynku względem osi tylko w pewnym przedziale położeń; jak nietrudno sprawdzić, przedział ten jest określony warunkiem $|\sin\alpha| \le M_t/M_g$, gdzie α jest kątem odchylenia wahadła od pionu. Aby upewnić się, czy obrót wahadła zostanie utrzymany, należy sprawdzić, czy w fazie wznoszenia się wahadło jest w stanie przebyć rozpędem przedział $|\sin\alpha| > M_t/M_g$, jeśli początkowo ma ono prędkość kątową ω_0. Tak będzie, jeżeli

$$\frac{1}{2}I\,\omega_0^2 + M_t\left(\pi - 2\arcsin\left(\frac{M_t}{M_g}\right)\right) > 2\sqrt{M_g^2 - M_t^2}.$$

Drugi składnik po lewej stronie jest tu pracą siły tarcia, a prawa strona – przyrostem energii grawitacyjnej (danej wzorem $E = -M_g\cos\alpha$). Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\omega_0 > 1{,}0525$ rad/s, a więc pod tym warunkiem ruch obrotowy będzie trwały. W przeciwnym przypadku wystąpią drgania wokół odchylonego od pionu położenia równowagi, albo też (przypadek graniczny) wahadło będzie nieskończenie długo dochodzić do niestabilnego górnego położenia równowagi.

W powyższym rozwiązaniu brakuje analizy istotnego szczegółu: czy podczas wznoszenia się pokonywanie przedziału $|\sin\alpha| > M_t/M_g$ będzie się rozpoczynać od prędkości kątowej ω_0? Dla przyjętych tu danych jest to prawdą (można to wykazać rachunkiem lub eksperymentem komputerowym) – ale w przypadku $M_g = 2\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ jest inaczej, po upływie długiego czasu wahadło w żadnym niezerowym przedziale czasu nie będzie pozostawać w spoczynku względem osi. Zadanie staje się przez to znacznie trudniejsze, a rozwiązanie można oprzeć na eksperymencie komputerowym, tzn. analizie ruchu wahadła metodą „krok po kroku”. Minimalną wartością ω_0, dającą trwały obrót wahadła, jest wtedy 1,6443 rad/s.

323. Połączmy n ogniw szeregowo i m takich zespołów równolegle. Opór zastępczy takiego ukłądu wynosi nR_w/m, a siła elektromotoryczna – $n\varepsilon$, gdzie R_w i ε są oporem wewnętrznym i siłą elektromotoryczną pojedynczego ogniwa. Natężenie prądu płynącego przez żarówkę dołączoną do układu ma wartość $I = \frac{n\varepsilon}{R+nR_w/m}$, gdzie R jest oporem żarówki. Przekształcając to równanie wyznaczamy m, a całkowita liczba ogniw N wynosi $N = mn = \frac{n^2R_wI}{n\varepsilon - RI}$. Traktując n jako zmienną ciągłą możemy zbadać minimum funkcji $N(n)$ – występuje ono dla wartości $n = 2RI/\varepsilon$, $m = 2R_wI/\varepsilon$. Podstawienie danych liczbowych daje wyniki: $I = 1{,}5$ A, $R = 6{,}67\,\Omega$, $n = 13{,}33$, $m = 4$. Oczywiście, n musi być liczbą całkowitą – np. jeśli $n = 14$, to dla $m = 4$ mamy łącznie 56 ogniw. Dobierając mniej typowe obwody, można „urwać” z tej liczby 2 ogniwa: wystarczy połączyć szeregowo 12 zestawów po 4 ogniwa równolegle i 2 zestawy po 3 ogniwa równolegle, razem 54 ogniwa. Równie skuteczne jest połączenie szeregowe 2 zestawów po 5 ogniw równolegle i 11 zestawów po 4 ogniwa równolegle.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2002

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **421** (WT = 2,12) i **422** (WT = 1,09) z numeru 5/2001

Adam Woryna	– Ruda Śląska	45,19
Marcin Peczarski	– Latchorzew	43,58
Witold Bednarek	– Łódź	40,21
Jacek Klisowski	– Lublin	36,96
Tomasz Wietecha	– Tarnów	36,91
Michał Adamaszek	– Kęty	36,79
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,33

Adam Woryna przekracza próg 44 p. i zostaje dziewięćdziesiątym piątym członkiem **Klubu 44 M**.

Zadania z matematyki nr 433, 434

Redaguje Marcin E. KUCZMA

433. Znaleźć wszystkie funkcje wymierne

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (P,\ Q \text{ – wielomiany rzeczywiste})$$

mające tę własność, że $f(x)^2 - f(x^2)$ jest funkcją stałą na zbiorze tych liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których $Q(x) \neq 0$ oraz $Q(x^2) \neq 0$.

434. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste styczne do tego okręgu w punktach A i C przecinają się w punkcie P, a styczne w punktach B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że punkty A, C, Q są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B, D, P są współliniowe.

Zadanie **434** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2001

Przypominamy treść zadań:

425. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ o nierównoległych bokach AB i CD znajduje się punkt X taki, że $|\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle BCX| < 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle CBX| < 90^\circ$. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie Y. Dowieść, że $|\sphericalangle AYB| = 2 \cdot |\sphericalangle ADX|$.

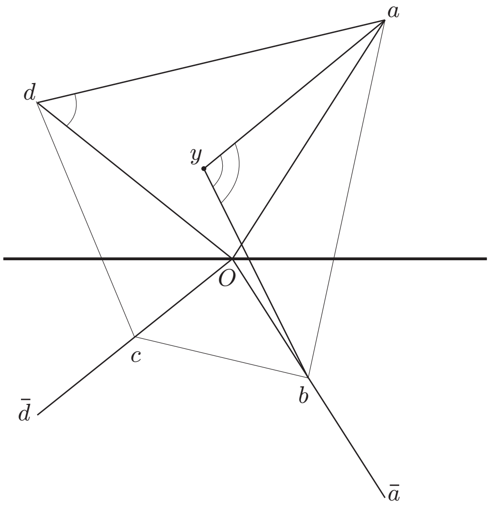
426. Liczby rzeczywiste $a,\ b,\ c$ spełniają warunki $(b+c)(a+b+c) = c$ oraz $b + c < 0$. Dowieść, że wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn są równe.

425. Zadanie można wygodnie rozwiązać rachując na liczbach zespolonych. Punkty X, A, B, C, D, Y są reprezentowane przez liczby zespolone 0, a, b, c, d, y. Trójkąty XAD i XBC są podobne, przy czym trójki punktów (X, A, D) i (X, B, C) są przeciwnie zorientowane. Można zatem umieścić te trójkąty na płaszczyźnie zespolonej w taki sposób, by zachodziły równości $b = \lambda\bar{a}$, $c = \lambda\bar{d}$, ze współczynnikiem rzeczywistym $\lambda > 0$. Punkt Y jest wyznaczony przez warunki $|y - a| = |y - \lambda\bar{a}|$ oraz $|y - d| = |y - \lambda\bar{d}|$. Pierwszy z tych warunków przepisujemy w postaci $(y - a)(\bar{y} - \bar{a}) = (y - \lambda\bar{a})(\bar{y} - \lambda a)$, czyli

$$(\lambda a - \bar{a})y + (\lambda\bar{a} - a)\bar{y} = (\lambda^2 - 1)|a|^2.$$

Drugi warunek daje analogiczne równanie, w którym symbole a i $\bar{a}$ są zastąpione przez d i $\bar{d}$. Otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi y i $\bar{y}$; tylko pierwsza z nich jest znacząca dla dalszego rozumowania. Rozwiązując układ, znajdujemy jej wartość:

$$y = \frac{\lambda\overline{ad}(a - d) + ad(\bar{d} - \bar{a})}{a\bar{d} - \bar{a}d}$$



(założenie, że proste AB i CD nie są równoległe, gwarantuje, iż $\lambda^2 \neq 1$ oraz $a\bar{d} \neq \bar{a}d$, więc rachunki są poprawne).

Należy dowieść, że argument kątowy ilorazu $(a - y)/(b - y)$ jest dwukrotnością argumentu ilorazu $(a - d)/(0 - d)$. To zaś jest równoważne wykazaniu, że dla pewnej liczby rzeczywistej $\mu > 0$ zachodzi równość

$$\frac{a - y}{b - y} = \left(\frac{d - a}{d}\right)^2 \cdot \mu.$$

Korzystając z otrzymanego wyrażenia dla liczby y, rachujemy:

$$a - y = \frac{\bar{d}(a - d)(a - \lambda\bar{a})}{a\bar{d} - \bar{a}d},$$

$$b - y = \lambda\bar{a} - y = \frac{d(\bar{a} - \bar{d})(a - \lambda\bar{a})}{a\bar{d} - \bar{a}d};$$

wobec tego

$$\frac{a - y}{b - y} = \frac{\bar{d}(a - d)}{d(\bar{a} - \bar{d})} = \frac{(\bar{d}(a - d))^2}{|d(a - d)|^2} = \left(\frac{d - a}{d}\right)^2 \cdot \frac{|d|^4}{|d(a - d)|^2},$$

i mamy równość, którą chcieliśmy uzyskać.

426. Wystarczy udowodnić, że wielomian $P(x)$ dzieli się przez trójmian kwadratowy postaci $x^2 - wx + w$ o wyróżniku $w(w - 4) > 0$; trójmian taki ma bowiem dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn mają jednakową wartość w. Chcemy więc wykazać, że dla pewnej pary liczb $w \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$ oraz $u \in \mathbb{R}$ jest tożsamościowo spełniona równość $P(x) = (x + u)(x^2 - wx + w)$, równoważna układowi równań

$$a = u - w, \qquad b = w - uw, \qquad c = uw.$$

Stałe a, b, c spełniają warunki podane w zadaniu. Z dwóch ostatnich równań widać, że trzeba przyjąć $w = b + c$; jest to z założenia liczba ujemna. Zachodzi równość $w(a + w) = c$ (warunek zadania). Przyjmujemy $u = a + w = c/w$ i mamy spełnione wszystkie trzy równania. Daje to dowodzoną tezę.