1/02 (49)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

DLACZEGO? (III/2)

Na początek odnotujmy, że $a_{58} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$. Zgadza się! Początkowych 57 wyrazów ciągu to liczby całkowite, 58. jest liczbą niewymierną. To **DLATEGO** chcę o tym ciągu opowiedzieć. Ciąg dany jest wzorem

$$a_n = \sqrt{\lceil\sqrt{10080n}\rceil^2 - 10080n}\ ,$$

gdzie $\lceil x\rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą niemniejszą niż x, czyli zaokrąglenie liczby x w górę do najbliższej liczby całkowitej.

Co wobec tego tak naprawdę robi zagmatwany wzór na a_n? Otóż bierze on liczbę $10080n$ i w naiwny sposób stara się przedstawić tę liczbę w postaci różnicy kwadratów liczb całkowitych $s^2 - t^2$. A sposób jest naprawdę naiwny. Liczba s^2 to najmniejszy kwadrat, który nie jest mniejszy od $10080n$. A $t^2 = a_n^2$ to różnica $s^2 - 10080n$. I trzeba cudu, żeby ta różnica była kwadratem liczby całkowitej.

Nie ma więc sensu pytanie, **DLACZEGO** a_{58} nie jest liczbą całkowitą. Nie jest, bo nie ma powodów, żeby od pierwiastka kwadratowego z przypadkowo wziętej liczby oczekiwać całkowitości. Za to jak najbardziej na miejscu jest pytanie: **DLACZEGO** dla $n \le 57$ otrzymujemy liczby całkowite?

Co to znaczy, że a_n jest liczbą całkowitą? Znaczy to tyle, że liczba $10080n$ jest postaci $s^2 - t^2$, gdzie s i t są całkowite nieujemne oraz t nie jest za duże, dokładniej $t < \sqrt{2\sqrt{10080n}}$. Ponieważ $s^2 - t^2 = (s-t)(s+t)$, więc tak naprawdę interesuje nas przedstawienie liczby $10080n$ w postaci iloczynu liczb jednakowej parzystości (czyli parzystych, wobec parzystości $10080n$), o niezbyt dużej różnicy. Ostatecznie, po podzieleniu liczby $10080n$ przez 4, otrzymujemy następujący wniosek.

Liczba a_n jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2520n$ jest iloczynem dwóch liczb całkowitych o różnicy mniejszej od $\sqrt{2\sqrt{10080n}} = 2\sqrt{6}\sqrt[4]{70n}$. A to z kolei oznacza, że wśród dzielników liczby $2520n$ znajdzie się dzielnik nie za bardzo różniący się od $\sqrt{2520n}$.

Ponieważ $2520 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, u liczby $2520n$ dzielników ci dostatek, nic więc szokującego w tym, że dla $n \le 57$ udawało się wśród nich znaleźć odpowiedni dzielnik.

O SZKODLIWOŚCI DLA OGÓLNOŚCI

Często w dowodach używa się sformułowania *bez szkody dla ogólności możemy założyć, że...* Zajmijmy się taką oto szczególną sytuacją. W kontekście dosyć symetrycznego wyrażenia $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ chcemy użyć formułki: *bez szkody dla ogólności możemy założyć...* (i tu pewne nierówności pomiędzy $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które mogą być pomocne w dowodzie). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $n = 5$, gdy wartość n jest bez istotnego znaczenia.

Sytuacja najprostsza. Wyrażenia: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$, $x_1x_2x_3x_4x_5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+$ $+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$, $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}+$ $+\sqrt{x_5}$ są symetryczne ze względu na x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tzn. nie zmieniają się przy dowolnej permutacji liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Liczby te możemy więc dla wygody uporządkować jak tylko chcemy, np. niemalejąco. Przy takich wyrażeniach możemy **bez szkody dla ogólności** założyć, że $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$.

Sytuacja trochę trudniejsza. Wyrażenie $x_1x_2^2+x_2x_3^2+$ $+x_3x_4^2+x_4x_5^2+x_5x_1^2$ nie ma pełnej symetrii. Istotnie, zamieniając x_1 i x_2 otrzymujemy wyrażenie $x_2x_1^2+x_1x_3^2+$ $+x_3x_4^2+x_4x_5^2+x_5x_2^2$, które jest inne niż wyjściowe. Widzimy jednak pewną, częściową symetrię, która powoduje, że każda z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jest w nim równouprawniona. Wyrażenie to nie zmienia się przy cyklicznej permutacji (takich permutacji jest 5 łącznie z identycznością) liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Możemy więc **bez szkody dla ogólności** założyć, że x_1 jest najmniejszą z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lub też tylko, że $x_1 \le x_2$. Ale nie możemy już zakładać, że $x_1 \le x_2 \le x_3$, bo np. liczby $5, 4, 3, 2, 1$ nie dają się cyklicznie spermutować tak, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg niemalejący.

Sytuacja jeszcze trudniejsza. Wyrażenie $x_1x_2+x_2x_3+$ $+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1$ ma trochę więcej symetrii. Pozostaje niezmienione nie tylko przy cyklicznej permutacji liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ale także przy jednoczesnej zamianie x_2 z x_5 i x_3 z x_4. Ogólniej, gdyby liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 umieścić w wierzchołkach pięciokąta foremnego, to dane wyrażenie nie zmienia się przy dowolnej izometrii (jest ich 10) tego pięciokąta. Innymi słowy, mając dane liczby w wierzchołkach pięciokąta, możemy dać przepis na uzyskanie „legalnej” permutacji tych liczb: wybierz x_1 dowolnie, za x_2 weź dowolnego sąsiada x_1, a dalej już nie masz wyboru – musisz posuwać się po obwodzie pięciokąta.

A teraz kilka prostych ćwiczeń, Drogi Czytelniku.
1) Uzasadnij, że w kontekście wyrażenia $x_1x_2+x_2x_3+$ $+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1$, **bez szkody dla ogólności** możemy założyć, że $x_1 \le x_2 \le x_3$.
2) Uzasadnij, że (w tym samym kontekście) jeżeli x_1 jest najmniejszą z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, to wcale nie możemy, **bez szkody dla ogólności**, zakładać, że $x_1 \le x_2 \le x_3$.
3) Uzasadnij, że w kontekście wyrażenia $x_1x_2+x_2x_3+$ $+x_3x_4+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$ $(n \ge 3)$, założenie $x_1 \le x_2 \le x_3$ odbywa się **bez szkody dla ogólności** przy n nieparzystym, natomiast dla n parzystego założenia tego poczynić nie można.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl