Duże i małe liczby Ramseya

Jerzy TYSZKIEWICZ

Co to takiego: liczby Ramseya?

Frank Plumpton Ramsey, 1903-1930, matematyk angielski, zajmował się logiką, podstawami matematyki, ekonomii i filozofii.

Graf to skończony zbiór wierzchołków połączonych krawędziami. Najprościej wierzchołki można sobie wyobrazić jako punkty w przestrzeni, a krawędzie jako odcinki prostych, łączące te wierzchołki.

Historia liczb Ramseya zaczęła się od następującego twierdzenia:

Twierdzenie Ramseya (1930). *Dla dowolnych naturalnych k, l istnieje takie n, że dowolny graf o n wierzchołkach zawiera albo k wierzchołków połączonych każdy z każdym, albo l wierzchołków nie połączonych żaden z żadnym.*

Twierdzenie Ramseya należy do działu określanego jako kombinatoryka (a ściślej jest to historycznie pierwsze z ważnych tzw. *twierdzeń podziałowych*), choć dla samego Ramseya stanowiło ono tylko narzędzie do badań z zakresu logiki matematycznej.

Jest już tradycją kombinatoryki, której częścią jest teoria grafów, że gdy się pojawia interesujące twierdzenie o istnieniu jakiejś liczby, natychmiast pada pytanie „Jak duża jest ta liczba?" Tak stało się też z n w twierdzeniu Ramseya. Otrzymało ono nazwę i stało się samo obiektem badań.

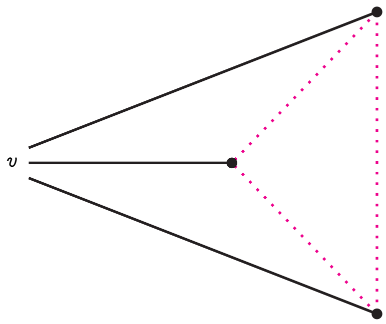
Definicja. Najmniejszą liczbę n o własności opisanej w twierdzeniu Ramseya oznacza się $R(k, l)$ i nazywa *liczbą Ramseya*.

Liczbę $R(3, 3)$ daje się łatwo wyznaczyć:

$$R(3, 3) = 6.$$

Zbiór niezależny to podzbiór wierzchołków grafu, pomiędzy którymi nie ma żadnych krawędzi.

Najpierw udowodnimy, że $R(3, 3) \leq 6$. Musimy wykazać, że dowolny graf G o sześciu wierzchołkach zawiera albo trójkąt, albo zbiór niezależny o trzech wierzchołkach. Ustalmy dowolny wierzchołek v grafu G. Pozostałych wierzchołków jest pięć, więc wśród nich albo są trzy wierzchołki połączone krawędziami z v, albo są trzy wierzchołki niepołączone z v.

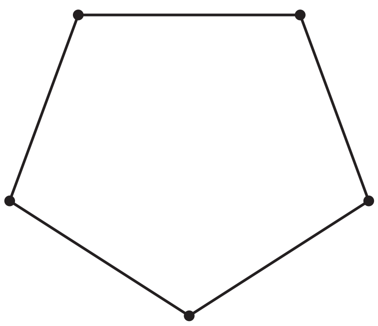


Rys. 1

W tym pierwszym przypadku, jeśli którekolwiek dwa spośród trzech wierzchołków sąsiednich v są połączone krawędzią, to tworzą one wraz z v trójkąt. Jeśli zaś żadnych takich dwóch nie ma, to ci trzej sąsiedzi v tworzą zbiór niezależny.
W drugim przypadku (trzech nie-sąsiadów, rys. 1) rozumowanie jest symetryczne.

Teraz zaś wskażemy przykład grafu o pięciu wierzchołkach, bez trójkąta i bez zbioru niezależnego o trzech wierzchołkach, co będzie znaczyło, że $R(3, 3) > 5$. Jest on na rysunku 2.

Tym samym dowód równości $R(3, 3) = 6$ jest zakończony.



Rys. 2

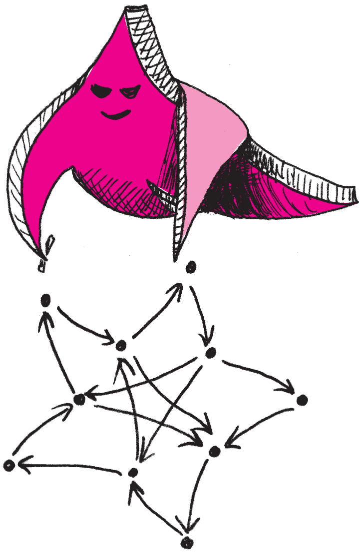
Aktualny stan wiedzy o liczbach Ramseya

Po obejrzeniu dowodu równości $R(3, 3) = 6$ można dojść do przekonania, że nietrudno jest obliczać liczby Ramseya. Ale to nieprawda. Naprawdę wyznaczanie liczb Ramseya jest niesłychanie trudne. To, co dzisiaj o nich wiemy, można z grubsza podzielić na trzy kategorie:

- Twierdzenia o asymptotycznym zachowaniu liczb Ramseya (to liczby „duże" z tytułu).
- Twierdzenia o wartościach tych liczb dla konkretnych grafów (to liczby „małe" z tytułu).
- Twierdzenia o rekurencyjnych zależnościach między liczbami dla różnych k i l.

Duże liczby Ramseya

Pierwszym ważnym wynikiem było następujące oszacowanie Erdősa i Szekeresa z 1935 roku:



$$R(m,n) \le \binom{m+n-2}{m-1}, \tag{1}$$

którego dowód opierał się na specjalnym dowodzie twierdzenia Ramseya, pozwalającym oszacować z góry szybkość wzrostu n. Dopiero 50 lat później udało się ten wynik ulepszyć w istotny sposób: Rodl (w 1986) i niezależnie Thomason (w 1987) udowodnili, że

$$\lim_{n\to\infty} R(n,n) \Big/ \binom{n+n-2}{n-1} = 0,$$

co oznacza, że nierówość (1) była „przeszacowana" o więcej niż stały czynnik. Jeśli chodzi o oszacowania dolne, to nadal rekordem jest oszacowanie Erdősa z 1961 roku, którego dowód poważnie uprościł Spencer w 1977 roku:

$$R(n,n) \ge n2^{n/2} \cdot (\sqrt{2}/e + f(n)), \tag{2}$$

gdzie f jest pewną funkcją, taką że $f(n) \longrightarrow 0$, gdy $n \longrightarrow \infty$.
I Erdős, i Spencer posłużyli się *konstrukcją probabilistyczną*: krawędzie pomiędzy n wierzchołkami rozmieszczali *losowo*, o istnieniu każdej krawędzi decydując za pomocą rzutu symetryczną monetą, niezależnie od pozostałych krawędzi. Celem jest udowodnienie, że z dodatnim prawdopodobieństwem w tak powstałym grafie albo jest odpowiednio dużo połączonych wierzchołków, albo odpowiednio dużo wierzchołków wzajemnie niepołączonych. Zauważmy, że ta metoda dowodu jest niekonstruktywna: dowód istnienia odbywa się bez wskazania metody konstrukcji.

Z nierówności (1) i (2) można wyprowadzić (za pomocą wzoru Stirlinga)

$$\sqrt{2} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{R(n,n)} \le$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{R(n,n)} \le 4.$$

Nadal nierozstrzygnięte jest pytanie Erdősa, czy granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{R(n,n)}$ istnieje, i jeśli tak, to ile wynosi.

Jedyna duża grupa liczb Ramseya, dla której znamy dokładne oszacowania ich wielkości, to liczby $R(n,3)$:

$$c\frac{n^2}{\log n} \le R(n,3) < \frac{n^2}{\log(n/e)},$$

gdzie c jest pewną stałą dodatnią.
Oszacowanie górne podał Shearer w 1983 r., a dolne Kim w dwanaście lat później (jego dowód jest niekonstruktywny).

Małe liczby Ramseya

Poniższa tabelka zawiera wszystkie aktualnie znane dokładne wartości liczb Ramseya. Są one wyróżnione tłustym drukiem. W pozostałych polach górna liczba to najlepsze znane górne oszacowanie, dolna zaś to najlepsze znane dolne oszacowanie. Tu widać najlepiej, jak niewiele wiemy o liczbach Ramseya.

	3	4	5	6	7	8	9
3	**6**	**9**	**14**	**18**	**23**	**28**	**36**
4		**18**	**25**	41 35	61 49	84 55	115 69
5			49 43	87 58	143 80	216 95	316 121
6				165 102	298 109	495 122	780 153

Obliczenie właściwie każdej z wartości w tabeli było osiągnięciem. Jako przykład spójrzmy na historię badania $R(4,5)$.

1965: $24 < R(4,5) \le 30$ (Kalbfleisch)

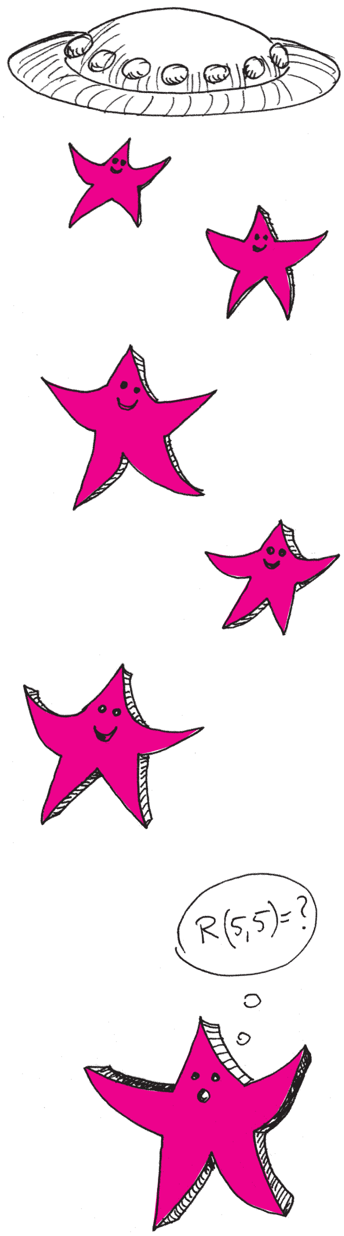
1968: $R(4,5) \le 28$ (Walker)

1988: $R(4,5) \le 27$ (McKay i Radziszowski)

1992: $R(4,5) \le 26$ (McKay i Radziszowski)

1995: $R(4,5) \le 25$ (McKay i Radziszowski)

Po trzydziestu latach górne i dolne oszacowania „spotkały" się i teraz wiemy już, że $R(4,5) = 25$.



Warto zaznaczyć, że w tej historii ostatnim wynikiem uzyskanym metodami ręcznymi był ten pierwszy, autorstwa Kalbfleischa. Począwszy od Walkera wszystkie następne oszacowania wykorzystywały obliczenia komputerowe w coraz większym stopniu, a ostateczne ustalenie wartości $R(4,5)$ przez McKaya i Radziszowskiego w 1995 roku było efektem obliczeń całej sieci komputerów, których łączny nakład pracy wynosił kilka lat pracy procesora. Przy tym algorytm wykorzystany w tym obliczeniu był bardzo skomplikowany i sprytny, bo przejrzenie wszystkich grafów o 25 wierzchołkach (aby się przekonać, że w każdym są albo krawędzie czworościanu, albo 5 wierzchołków bez żadnych krawędzi pomiędzy sobą) jest niewykonalne: wszystkich grafów do przejrzenia byłoby co najmniej

$$\frac{2^{\binom{25}{2}}}{25!} \approx 0{,}13 \cdot 10^{66}.$$

Jest to liczba dosłownie kosmicznie wielka – jej kwadrat przekracza szacowaną liczbę protonów w całym obserwowalnym Wszechświecie.

Rekurencje dla liczb Ramseya

Pragnę wspomnieć tu kilka nierówności. Pierwsza z nich to ta, z której Erdős i Szekeres wydedukowali oszacowanie (1):

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1).$$

Przy tym nierówność jest ostra, jeśli $R(m-1,n)$ oraz $R(m,n-1)$ są parzyste. Jej dowód jest bardzo podobny do przedstawionego już dowodu $R(3,3) \leq 6$, który jest w istocie jej przypadkiem szczególnym (bo oczywiście $R(2,3) = R(3,2) = 3$). Zauważmy przy okazji, że sporą wartość ma dodatkowy warunek, gwarantujący ostrość nierówności w niektórych przypadkach. Wprawdzie zmniejsza on oszacowanie tylko o 1, ale przypomnijmy sobie, ile trudu i lat pracy wymagało za każdym razem zmniejszenie oszacowania liczby $R(4,5)$ właśnie o 1…

Podobną uwagę można zrobić o nierówności Chunga, Cleve i Daguma (1993)

$$R(4, 4n+1) \geq 6R(3, n+1) - 5, \tag{3}$$

która jest tylko trochę mocniejsza od bardzo łatwej do udowodnienia nierówności

$$R(3, 4n+1) \geq 4R(3, n+1) - 3.$$

Liczby Ramseya i najazd z kosmosu

Erdős lubił przedstawiać trudność wyznaczania liczb Ramseya za pomocą następującej historii:

Wyobraźmy sobie, że na Ziemi pojawiają się przedstawiciele obcej cywilizacji o olbrzymiej przewadze technologicznej nad nami i, grożąc zniszczeniem Ziemi, żądają od nas informacji o liczbach Ramseya.

Erdős uważał, że

gdyby nas zapytali o wartość $R(5,5)$, to należałoby wysiłek wszystkich matematyków świata skierować na ten problem. Natomiast gdyby pytanie dotyczyło $R(6,6)$, to należałoby zaatakować najeźdźców, bo mielibyśmy o wiele większą szansę na zwycięstwo w walce zbrojnej niż na znalezienie żądanej liczby.

Autorowi tego artykułu wydaje się, że jest jeszcze jedna możliwość: należałoby oświadczyć obcym, że znaleźliśmy zadziwiający dowód równości $R(6,6) = 102$, ale nie mamy pod ręką dość papieru, by go zapisać. Może zachowaliby się w tej sytuacji, tak jak na prawdziwych matematyków przystało…