Świat wielościanów

Piotr PAWLIKOWSKI

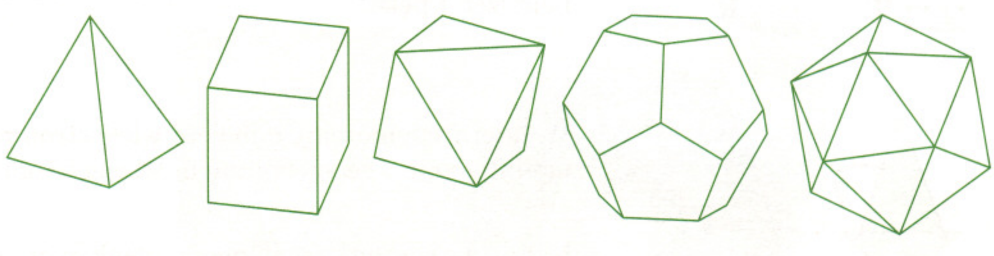
Trudno wyobrazić sobie numer *Delty* poświęcony wszelkiego rodzaju „majsterkowaniu” bez artykułu o wielościanach. Jest to chyba najciekawszy dział matematyki, jeśli chodzi o możliwość wykonywania modeli. Co prawda, można znaleźć w Internecie programy pozwalające stwarzać na ekranie obrazy najróżniejszych brył, ale nawet najwspanialszy model wirtualny, oglądany na ekranie monitora, zawsze na nim pozostanie i nie zastąpi w pełni modelu, który można wziąć w dłonie, poobracać, postawić na półce czy też powiesić na choince. Starannie wykonane modele mogą się stać oryginalną ozdobą i dekoracją nie tylko szkolnej pracowni matematycznej.

Sądzę, że chyba każdy z Czytelników skleił własnoręcznie przynajmniej kilka prostych modeli wielościanów. Jestem zarazem przekonany, że dla wielu przygoda związana z wykonywaniem modeli zakończyła się, zanim jeszcze zdążyła się rozpocząć.

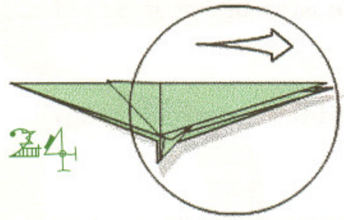
Z reguły modele wielościanów skleja się z płaskiej siatki. Dostępny w Internecie program Poly Pro (www.peda.com) umożliwia m.in. wydrukowanie siatek ponad stu różnych wielościanów wypukłych. Wykorzystywanie gotowych siatek do wykonywania modeli ma sporo plusów, w tym też „plusy ujemne”. Czasami – zwłaszcza przy bardziej skomplikowanych modelach manipulowanie całą siatką bywa kłopotliwe, prócz tego chcąc przedstawić siatkę takiego wielościanu na znormalizowanej kartce (np. A4), jesteśmy zmuszeni do zmniejszenia wymiarów modelu. Ponadto modele wykonane z jednego kawałka kartonu są z reguły jednobarwne.

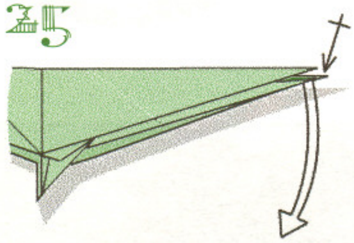
Dlatego też pragnę zachęcić Czytelników do próby wykonania pewnej liczby modeli z pojedynczych wielokątów wyciętych z kolorowego kartonu. Jest to z pewnością nieco pracochłonne, ale daje dobre efekty i bardzo podnosi atrakcyjność wykonanych modeli. Zanim przystąpimy do pracy, przedstawię kilka uwag natury technicznej. Należy pamiętać o tym, że model zawsze pozostanie modelem. Nie do uniknięcia są pewne niedoskonałości – nie ma i nie będzie modeli doskonałych.

Potrzebne będą: kolorowy karton (160–200 g), linijka (najlepiej metalowa), nożyk do tapet, „szpikulec” (np. nóżka cyrkla), nożyczki i dobry klej. Z nabyciem tego ostatniego nie ma już problemów – osobiście polecam klej introligatorski (zwykłe kleje biurowe nie nadają się do wykonywania bardziej skomplikowanych modeli). Dobrze jest zacząć od rzeczy najprostszych (a w tym przypadku jednocześnie najważniejszych) – od modeli brył platońskich.



Z ich wykonaniem nikt nie powinien mieć kłopotów. Na grubszym kartonie konstruujemy stosowny wielokąt foremny, który posłuży nam za szablon. Można to zrobić klasycznie – cyrklem i linijką, albo za pomocą kątomierza. Szablon przykładamy do kartonu, z którego chcemy wykonać model. Nakłuwamy wierzchołki wielokąta, przenosząc je w ten sposób na karton. Zaznaczone punkty łączymy przy linijce nożykiem do tapet (uwaga na palce) delikatnie nacinając papier. Nacięcie gwarantuje, że skrzydełka potrzebne do połączenia sąsiednich ścian dadzą się łatwo zagiąć. Wycinamy i sklejamy ze sobą poszczególne elementy.





Rozwiązanie zadania F 561. Mamy tu do czynienia z połączonymi równolegle dwoma kondensatorami o pojemnościach $C_1 = \varepsilon_0 S_1/d = \varepsilon_0 S(l_0 - l)/dl_0$ i $C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 S_2/d = \varepsilon\varepsilon_0 Sl/dl_0$, a więc: $C = C_1 + C_2$.

Rozwiązanie zadania F 562. Jeżeli ciecz znajdzie się w silnie niejednorodnym polu w pobliżu brzegów okładek, to ulegnie ona polaryzacji i będzie wciągana w przestrzeń pomiędzy płytkami. Ponieważ ładunek okładek nie zmienia się, a pojemność kondensatora rośnie, więc energia pola maleje. Jest to skompensowane wzrostem energii potencjalnej słupa cieczy między okładkami. Z prawa zachowania energii mamy:

$$\frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}mgh.$$

Tutaj:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{ab}{d},$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{b}{d}(a + (\varepsilon - 1)h)$$

(patrz zadanie **F 561**) i $m = \rho bhd$. Po podstawieniach i uproszczeniach otrzymujemy:

$$(\varepsilon - 1)q^2 = \varepsilon_0 \rho g h a b^2 (a + (\varepsilon - 1)h).$$

Ładunek na okładkach można wyrazić przez potencjał $q = \varphi_0 C_0 = \varepsilon_0 \varphi_0 \frac{ab}{d}$. Po uproszczeniach otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$h^2 + \frac{a}{\varepsilon - 1}h - \frac{\varepsilon_0 a \varphi_0^2}{\rho g d^2} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest szukana wartość wysokości, na którą wzniesie się ciecz:

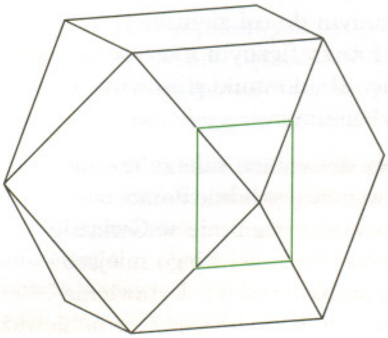
$$h = -\frac{a}{\varepsilon - 1} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon - 1}\right)^2 + 4\frac{\varepsilon_0 a \varphi_0^2}{\rho g d^2}}$$

(wybraliśmy rozwiązanie nieujemne).

Do wykonania czworościanu warto użyć 4 kolorów, dla sześcianu – 3, dla ośmiościanu – 2 lub 4, dla dwunastościanu – 4, a dla dwudziestościanu – 5. Znalezienie dobrego rozkładu kolorów (zwłaszcza dla ostatnich dwóch modeli) niech pozostanie zadaniem dla Czytelnika.

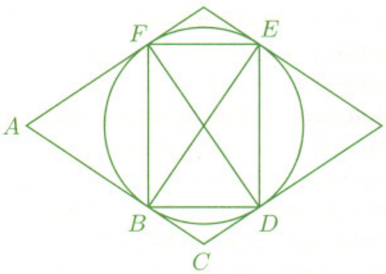
Następny krok to wykonanie modeli brył archimedesowych. Pełną ich listę można bez trudu znaleźć w literaturze (np. w „Encyklopedii szkolnej – matematyka"). Tutaj wspomnę jedynie, że jest ich 13, do ich wykonania oprócz trójkątów, kwadratów i pięciokątów potrzebne będą jeszcze sześcio-, ośmio- i dziesięciokąty foremne, oraz że liczba ich ścian waha się od 8 do 92.

Po wykonaniu tych dwóch zestawów modeli można pójść dalej.



Rys. 1

Weźmy dowolny z wielościanów platońskich lub archimedesowych. Jeśli połączymy w nim środki wszystkich ścian schodzących się w jednym wierzchołku, otrzymamy wielościan dualny mający taką liczbę wierzchołków, jak liczba ścian wielościanu wyjściowego oraz liczbę ścian równą liczbie wierzchołków wyjściowego. Liczby krawędzi obu brył są równe. Łatwo się przekonać, że dualnym do czworościanu jest czworościan, do sześcianu – ośmiościan, do dwunastościanu – dwudziestościan (i na odwrót). Jeżeli dany wielościan można wpisać w kulę, to ścianę wielościanu dualnego można stosunkowo łatwo wyznaczyć, stosując metodę Dormana Luke'a. Dla jej przedstawienia posłużę się przykładem archimedesowego sześcio-ośmiościanu (bryły złożonej z łączonych na przemian 6 kwadratów i 8 trójkątów równobocznych).

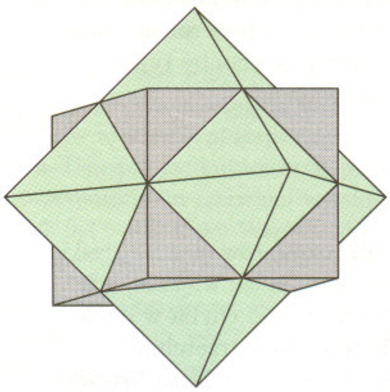


Rys. 2

Przeprowadźmy płaszczyznę przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. W tym przypadku otrzymujemy w przekroju prostokąt o stosunku boków $1:\sqrt{2}$ (rys. 1). Na tym przekroju opisujemy okrąg, a następnie prowadzimy styczne do tego okręgu w punktach będących wierzchołkami przekroju (rys. 2).

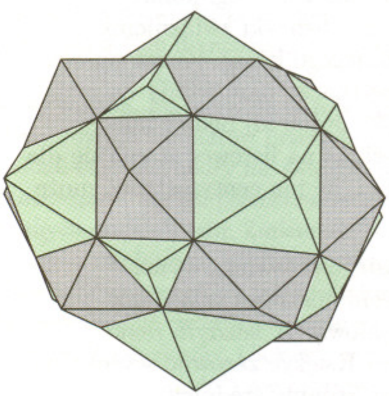
Odcinki stycznych wyznaczają nam ścianę bryły dualnej. W omawianym przykładzie jest nią romb, a wielościan dualny to dwunastościan rombowy. W opisany sposób możemy wyznaczyć ścianę i zbudować model bryły dualnej do każdej archimedesowej (a także do wielu innych).

Bardzo atrakcyjnie wyglądają modele przenikających się brył, z których jedna jest dualna do drugiej. Rysunki 3 i 4 przedstawiają sześcian z ośmiościanem oraz sześcio-ośmiościan z dwunastościanem rombowym.



Rys. 3

Wykonanie takich modeli także nie jest specjalnie trudne. Dobre efekty daje oddzielne wykonanie pewnej liczby ostrosłupów, które następnie łączy się. Przy odrobinie wprawy można łączyć je „na styk" krawędziami podstaw, ale można też przygotować łączniki w postaci „podwójnych" skrzydełek przyklejanych do podstaw. Patrząc na rysunek 3 można zobaczyć, że do wykonania tego modelu potrzeba 6 ostrosłupów prawidłowych czworokątnych (ściany boczne są równoboczne) i 8 ostrosłupów prawidłowych trójkątnych, których ściany boczne są trójkątami prostokątnymi. Do wykonania modelu z rysunku 4 potrzeba: 6 ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których ściany boczne są przystające do trójkąta ABF z rysunku 2, 8 ostrosłupów prawidłowych trójkątnych o ścianach bocznych przystających do trójkąta BCD oraz 14 ostrosłupów o podstawie $BDEF$ i ścianach bocznych na przemian prostokątnych i równobocznych.



Rys. 4

Analogicznie można wykonać kompozycje innych par wielościanów dualnych.

Na koniec proponuję wykonanie tą samą techniką modeli dwóch innych ważnych wielościanów. Ostrosłupy potrzebne do wykonania obu modeli są prawidłowe i ich ściany boczne są trójkątami o kącie przy podstawie 72°. Do wykonania pierwszego z nich potrzeba 12 ostrosłupów pięciokątnych, wykonanie drugiego wymaga połączenia 20 ostrosłupów trójkątnych. Łączymy je tak, by wewnątrz bryły powstał odpowiednio dwunastościan lub dwudziestościan foremny. Dociekliwości Czytelników pozostawiam odpowiedź na pytanie „co to za wielościany?".

Życzę wytrwałości i dobrej zabawy.