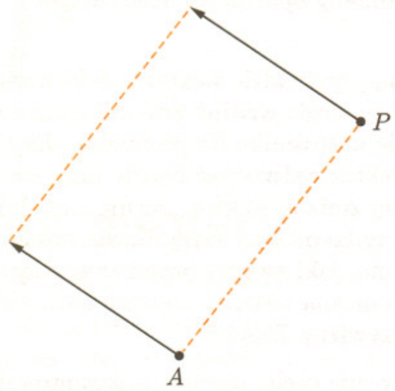
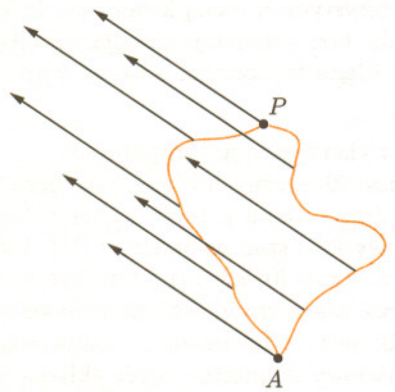
Suwanie wektora po krzywych

Marek KORDOS

Kiedy w szkole na lekcjach geometrii mówi się o przesunięciu równoległym wektora,



to nic nie mówi się o tym, jak ma się go przesunąć ze starego położenia w nowe. Ale można byłoby wyobrazić sobie, że rysujemy jakąś linię od A do P i po niej powolutku przesuwamy wektor. Nietrudno wtedy zauważyć, że wynik będzie taki sam, niezależnie od tego, jaką trasę przesuwania obierzemy.

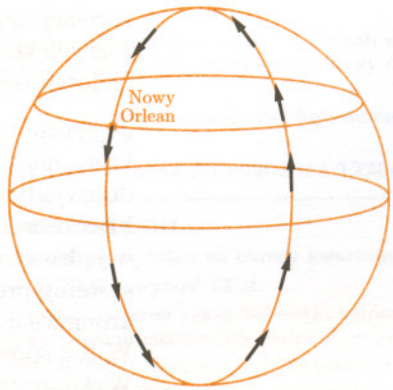


Sytuacja się komplikuje, gdy chcemy przesuwać wektor po jakiejś zakrzywionej powierzchni, np. po powierzchni kuli, walca czy stożka. Wydaje się, że do wyboru są dwie niedogodności. Jeśli bowiem przesuwany wektor będzie w każdym swoim położeniu miał ten sam kierunek, to – na ogół – bardzo prędko zacznie on mocno odstawać od powierzchni. Jeśli z kolei będziemy go suwać po powierzchni, to – znów na ogół i znów bardzo prędko – zmieni on kierunek, więc cóż to za równoległe przesuwanie?

Ktoś bardzo precyzyjny może powiedzieć, że sprzeczność tkwiła od razu w postawieniu problemu: jeśli bowiem powierzchnia jest zakrzywiona, to przecież żaden wektor i tak nie może na niej leżeć. Tu jednak matematycy „od zawsze" mieli wspólne zdanie. Zamiast wektora leżącego na powierzchni rozpatrywali wektory leżące w płaszczyźnie stycznej do powierzchni (dla płaszczyzny to wszystko jedno – prawda?). Można powiedzieć, że decydujemy się na wektory najbardziej leżące na powierzchni, jak to jest tylko możliwe.

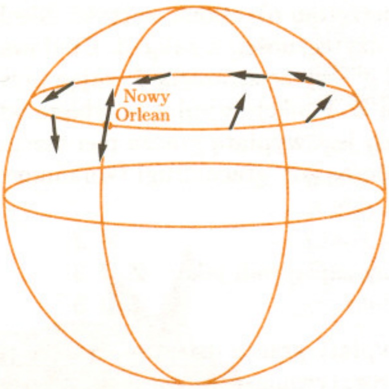
Natomiast problem dobrego określenia przesuwania równoległego wektorów po powierzchniach długo czekał na jednoznaczne rozstrzygnięcie. Przyjęto w końcu pomysł Włocha, który zwał się Tulio Levi-Civita, a było to zaledwie 85 lat temu. Levi-Civita proponował, aby postępować tak. Interesować się będziemy tylko „poziomym" ruchem wektora, czyli będziemy postępowali tak, jakby po małym, rzeczywiście równoległym przesunięciu wektora został on prostopadle zrzutowany na płaszczyznę styczną do powierzchni. Tym sposobem jest on najbardziej równoległy, jak to tylko dla wektorów stycznych do powierzchni jest możliwe, na tyle równoległy, na ile mu powierzchnia pozwala. Takie przesunięcie nazywa się nazwiskiem jego wynalazcy lub przesunięciem absolutnym.

I wtedy okazuje się, że przesuwając wektor od punktu do punktu otrzymujemy wynik zależny od tego, wzdłuż której krzywej go przesuwamy. Można się o tym przekonać doświadczalnie. Na sferze (czyli powierzchni kuli) – patrzmy na nią tak, jakby to był globus – przesuwamy wektor wskazujący nam (ziemski) kierunek południowy wzdłuż 90. południka długości zachodniej, a to po to, by zacząć od Nowego Orleanu (który ma na dodatek miłą północną szerokość 30°, czyli $\pi/6$). Łatwo zauważyć, że przesuwany i doginany wektor będzie stale wskazywał (ziemskie) południe, aż do chwili, gdy osiągnie biegun południowy, by dalej (już na 90. wschodnim południku) wskazywać konsekwentnie północ, aż do bieguna północnego, gdzie zacznie wskazywać południe i powróci do Nowego Orleanu w takim samym położeniu, jak był na starcie.



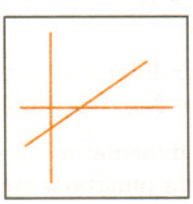
Taką własność mają linie najmniej krzywe na powierzchni – czy jak kto woli: najbardziej proste. My zresztą w codziennej praktyce takie właśnie linie na Ziemi nazywamy prostymi. Np. linia kolejowa łącząca Warszawę z Białymstokiem jest na większości swojej długości prosta właśnie w tym sensie. Oczywiście południki są też w tym właśnie sensie proste. Aby nie pisać ciągle, że „w tym sensie" matematycy mają na takie linie specjalną nazwę: to są **geodezyjne**. Jak poznaje się geodezyjną? Jednym ze sposobów jest patrzenie, czy wektor przesuwany wzdłuż tej linii tworzy stale ten sam kąt ze styczną do tej linii.

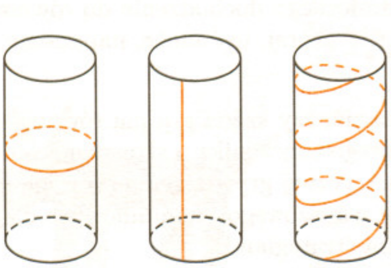
Spróbujmy teraz przesunąć ten sam wektor wzdłuż 30. równoleżnika. Widzimy (jeśli faktycznie przeprowadzamy to doświadczenie na globusie, a nie tylko w myślach), że wektor – początkowo tworzący ze styczną do tego równoleżnika kąt prosty – coraz bardziej odstaje. Na 90. wschodnim południku wskazuje już wschód (albo zachód – stronę przeciwną do tej, w którą go przesuwamy), a po przemierzeniu całego równoleżnika ma kąt zmieniony aż o π, czyli o 180°, a więc wskazuje północ! Przy innych równoleżnikach zmiana kąta będzie, oczywiście, inna.



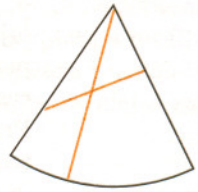
Tempo zmiany kierunku wektora przesuwanego wzdłuż jakiejś krzywej na powierzchni nazywa się krzywizną geodezyjną tej krzywej. Geodezyjne mają więc krzywiznę geodezyjną stale równą zeru.

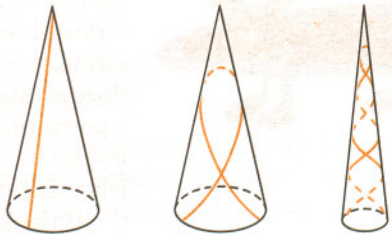
Bardzo interesujące jest spostrzeżenie, że krzywizna geodezyjna nie zmienia się przy wyginaniu powierzchni – byle jej tylko nie rozciągać przy tym ani nie skracać materiału, z którego powierzchnia jest wykonana, czyli mówiąc ściśle: nie zmieniać długości żadnej z krzywych na powierzchni. Jest z tego morał pozwalający znajdować geodezyjne na powierzchniach rozwijalnych (czyli dających się, po ewentualnych rozcięciach położyć na płaszczyźnie). Mianowicie, ponieważ na płaszczyźnie geodezyjnymi są proste (jako faktycznie najmniej krzywe), to trzeba zobaczyć, co z nich po zwinięciu powstaje. Na walcu otrzymujemy przeto trzy rodzaje geodezyjnych: okręgi, proste i śruby.



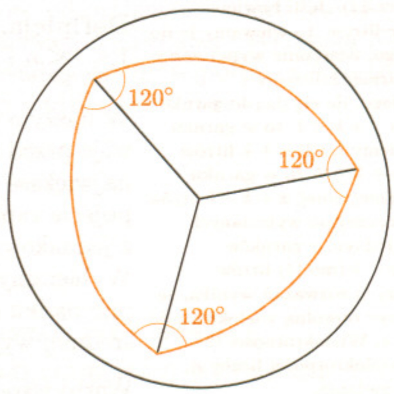


Na stożku są to również proste, ale także pętle, których liczba samoprzecięć zależy od kąta rozwarcia stożka.





Karol Gauss ponad półtora wieku temu odkrył, że na powierzchniach jednakowych w każdym punkcie (jak sfera czy siodło), trójkąt utworzony przez łuki geodezyjnych ma pole proporcjonalne do różnicy między sumą kątów (daną w mierze łukowej) a π. Dla płaszczyzny współczynnik proporcjonalności wynosi zero, co czyni to odkrycie nieprzydatnym. Ale, na przykład, na sferze geodezyjnymi są najmniej krzywe okręgi, czyli okręgi wielkie (mające środek w środku sfery); współczynnikiem proporcjonalności, o której mówi Gauss, jest odwrotność kwadratu promienia sfery. Tak więc chcąc znaleźć pole trójkąta utworzonego na sferze o promieniu R przez łuki jej okręgów wielkich, wystarczy obliczyć sumę jego kątów, odjąć od tego π i pomnożyć przez R^2.



Jest to akurat wielkość kąta bryłowego, którego przecięciem ze sferą jest ten trójkąt. Mam nadzieję, że każdy z Czytelników potrafi podać przepis na znalezienie pola czworo- czy pięciokąta utworzonego na sferze z łuków okręgów wielkich.

Krzywizna geodezyjna pozwoliła uogólnić ten sposób na dowolne krzywoliniowe wielokąty na powierzchniach, nazywa się to twierdzeniem Gaussa–Bonneta i powstało jeszcze w XIX wieku, przy innym określeniu krzywizny geodezyjnej. Tyle, że to już zupełnie inna bajka…