Polowanie na jelenia i równowagi Nasha

Jacek MIĘKISZ

W 1762 roku Jean Jacques Rousseau napisał: „Myśliwi biorący udział w polowaniu na jelenia są w pełni świadomi, że aby go upolować, muszą być lojalni wobec siebie i pozostać na swoich posterunkach. Jeżeli jednak zając przebiegnie w pobliżu jednego z nich, nie ma wątpliwości, że myśliwy ten ruszy za pewną zdobyczą, doprowadzając do fiaska polowanie na jelenia.” Przetłumaczmy to na język współczesnej teorii gier. Aby sprecyzować model teoriogrowy, musimy określić zbiór graczy $I = \{1, \ldots, n\}$, zbiór dostępnych im strategii $S_i = \{1, \ldots, m_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ oraz funkcje wypłat $u_i : S \to \mathbb{R}$, gdzie $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$; wypłata każdego gracza zależy nie tylko od jego strategii, lecz również od strategii wszystkich jego oponentów, to znaczy profilu strategii S. W naszym przypadku każdy z dwóch myśliwych ma do dyspozycji dwie strategie: jelenia (**J**) albo zająca (**Z**). Aby podać funkcję wypłat, musimy wpierw przypisać obu nieszczęsnym zwierzętom określoną wartość. Niech jeleń będzie wart 10 jednostek ekonomicznej użyteczności, a zając 3. Upolowany jeleń dzielony jest równo między dwóch graczy ze strategią **J**, zając przypada w całości każdemu graczowi ze strategią **Z**. Funkcja wypłat przybiera wtedy postać macierzy 2×2, której element u_{ij} jest wypłatą gracza pierwszego (wierszowego) grającego strategią i, podczas gdy gracz drugi (kolumnowy) gra strategią j:

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ co będziemy zapisywali jako } \quad \begin{array}{ccc} & \mathbf{Z} & \mathbf{J} \\ \mathbf{Z} & 3 & 3 \\ \mathbf{J} & 0 & 5 \end{array}$$

Gra jest symetryczna, co oznacza, że wypłaty gracza drugiego są dane przez macierz transponowaną do U. Gra jest rozgrywana w ten sposób, że gracze jednocześnie ogłaszają swoje strategie i dostają odpowiednie wypłaty. Macierz wypłat jest znana każdemu graczowi, który wie, że każdy z jego oponentów ją zna, wie, iż jego oponenci wiedzą, że on ją zna...

Pojawia się naglące pytanie: Jak grać? John Nash zaproponował następującą definicję równowagi. W równowadze Nasha, przy ustalonych strategiach przeciwników, żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii. Formalnie:

Definicja. $X = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ jest **równowagą Nasha**, jeśli dla każdego $1 \leq i \leq n$ i $A \in S_i$ $u_i(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) \geq u_i(X_1, \ldots, A, \ldots, X_n)$, gdzie $X_i \in S_i$.

W naszym przykładzie mamy dwie równowagi Nasha: $(\mathbf{J}, \mathbf{J})$ i $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$. Stajemy więc przed problemem wyboru jednej z nich. Pierwsza równowaga daje nam największe wypłaty, druga natomiast jest dominująca ze względu na ryzyko – pojęcie zaproponowane przez Seltena i Harsanyi'ego. Zakładamy, że przeciwnik z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$ zagra jedną z dwóch strategii. Wybieramy strategię, która daje nam większą wartość średnią. W naszym przypadku średnia wypłata dla strategii **Z** wynosi $(3 + 3)/2$ i jest większa od średniej wypłaty dla strategii **J** równej $(5 + 0)/2$.

Warto wspomnieć, że za swój wkład w teorię gier John Nash, Reinhard Selten i John Harsanyi zostali uhonorowani w 1994 roku Nagrodą Nobla z ekonomii.

Ostatnio zostało zaproponowanych kilka modeli dynamicznych, w których tylko niektóre równowagi Nasha danej gry są stabilnymi punktami stacjonarnymi, a więc zostają wybrane. Badaniem dynamicznego dochodzenia do równowag Nasha zajmuje się ewolucyjna teoria gier, o której, być może, napiszemy w przyszłości.

Wnikliwy Czytelnik zada oczywiście pytanie, czy każda gra ma równowagę Nasha. W odpowiedzi poprosimy wnikliwego Czytelnika o skonstruowanie dwóch gier niemających równowag Nasha: symetrycznej gry z trzema strategiami oraz gry niesymetrycznej (wypłaty dla gracza wierszowego i kolumnowego dane są przez dwie niezależne macierze) z dwiema strategiami.

Rozwiązanie zadania M 970.

a) Kolejne zawartości 5- i 3-litrowego garnka mogą być następujące:

(0,0), (0,3), (3,0), (3,3), (5,1), (0,1), (1,0), (1,3), (4,0).

b) n musi być podzielne przez $d = (k, l)$ (największy wspólny dzielnik). Jasne jest, że warunek ten jest konieczny, ponieważ po każdej czynności liczba litrów wody w każdym garnku jest podzielna przez d. Załóżmy, że $d | n$. Przyjmijmy $k < l$. Zauważmy, że jeśli możemy odmierzyć x litrów ($x \in \mathbb{Z}$), to możemy odmierzyć również $x + k \pmod{l}$. Jeśli bowiem odmierzyliśmy x litrów, to wlewamy je do garnka l-litrowego, następnie wypełniamy wodą z kranu garnek k-litrowy i przelewamy z niego, ile się da, do garnka l-litrowego. Jeśli $x + k < l$, to w garnku l-litrowym będziemy mieli $x + k$ litrów wody, jeśli zaś $x + k \geq l$, to w garnku k-litrowym będziemy mieć $x + k - l$ litrów wody. Tak czy inaczej po wykonanych czynnościach w jednym z garnków będziemy mieć $x + k \pmod{l}$ litrów wody. Z powyższych rozważań wynika, że możemy odmierzyć dowolną wielokrotność liczby k modulo l. Wielokrotności te stanowią zbiór wielokrotności liczby d, co dowodzi tezy zadania.

Odpowiedź na pytanie ze strony 13.

I tak, i nie... W przypadku rodzin nieskończonych należy dodatkowo założyć zwartość (czyli w przypadku $\mathbb{R}^2$: domkniętość i ograniczoność) elementów rozważanej rodziny.
W przeciwnym przypadku twierdzenie jest fałszywe – wystarczy przemyśleć rodzinę półpłaszczyzn: $\{P_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq n; y \in \mathbb{R}\}; n \in \mathbb{N}\}$.
Przykład na istotność założenia domkniętości pozostawiamy Czytelnikowi...

Aby tradycji matematycznej stało się zadość i wystąpiło *twierdzenie o istnieniu*, wprowadźmy strategie mieszane. Strategia mieszana i-tego gracza to rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii czystych S_i, czyli m_i nieujemnych liczb σ_{ij} sumujących się do 1; σ_{ij} jest prawdopodobieństwem, z jakim i-ty gracz zagra strategią j-tą. Przyjmujemy, że wypłata z profilu strategii mieszanych dana jest przez jej wartość oczekiwaną i uogólniamy w oczywisty sposób definicję równowagi Nasha, podstawiając w niej σ za X. Zachodzi wtedy następujące

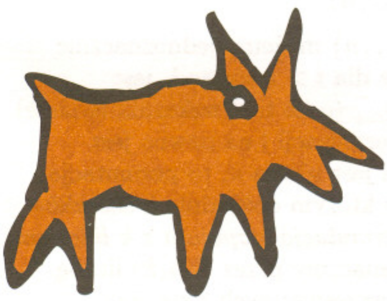
Twierdzenie
Każda gra ze skończoną liczbą graczy i strategii ma co najmniej jedną równowagę Nasha w strategiach mieszanych.

Dowód wykorzystuje jedno z twierdzeń o punkcie stałym (równowaga Nasha jest najlepszą odpowiedzią na równowagę Nasha).

Ambitnego Czytelnika poprosimy teraz o znalezienie wszystkich równowag Nasha dla dowolnej symetrycznej gry dwuosobowej z dwiema strategiami. Udowodni on w ten sposób powyższe twierdzenie dla tej klasy gier.

Przenieśmy się teraz z osiemnastowiecznego lasu do współczesnego miasta, gdzie dwóch pracowników właśnie zasiadło do wykończenia wspólnego projektu. Każdy z nich może albo pracować, $X_i = \mathbf{1}$, albo oszukiwać, czyli pozorować pracę, $X_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$; praca wymaga inwestycji 3 jednostek naszej użyteczności. Przychód z wykonanego projektu $4(X_1 + X_2)$ jest dzielony równo między partnerów. Powyższa gra ma następujące przedstawienie macierzowe:

$$\mathrm{U} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & 2 & 0 \end{array}$$



Nietrudno domyślić się, skąd pochodzi nazwa Dylemat Więźnia: jeśli dwóch bandytów „pójdzie w zaparte", to zostaną uniewinnieni, jeśli jeden z nich się przyzna, a drugi nie, to pierwszy z nich będzie miał silnie złagodzoną karę, a jeśli obaj, to ich kary będą tylko nieco złagodzone.

Jedyną równowagą Nasha jest profil $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Zauważmy, że w przypadku pracy obu partnerów ich wypłata jest większa. Profil $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ nie jest jednak równowagą Nasha. Staramy się więc działać racjonalnie, grać strategią w jedynej równowadze Nasha i efektem tego jest obustronny brak korzyści. Powyższa gra znana jest pod nazwą Dylematu Więźnia. Aby zrozumieć występowanie zachowań altruistycznych w układach rywalizujących jednostek, zaproponowano ostatnio proste modele dynamiczne, w których stabilne punkty równowagi nie są równowagami Nasha. Przeszliśmy więc od problemu wyboru jednej z równowag Nasha do problemu znalezienia równowagi nie będącej równowagą Nasha. Analiza dynamicznych strategii prowadzących do współpracy w powtarzanej grze typu Dylemat Więźnia wymaga oddzielnego omówienia.

Rozwiązanie zadania M 971.
a) Kolejne zawartości 10-, 7- i 3-litrowego garnka mogą być następujące:

(10,0,0), (7,0,3), (7,3,0), (4,3,3), (4,6,0), (1,6,3), (1,7,2), (8,0,2), (8,2,0), (5,2,3).

b) $(k,l)|n \wedge k+l \geq n$. Możemy bez straty ogólności przyjąć $2n \geq l \geq k$. Niech X będzie zbiorem takich trójek liczb całkowitych (a,b,c), że istnieje procedura przelewania prowadząca do sytuacji, w której w garnku $2n$-, l- i k-litrowym znajduje się odpowiednio a, b i c litrów zupy. Niech $d = (k,l)$. Za pomocą prostej indukcji można wykazać, że jeśli $(a,b,c) \in X$, to co najmniej dwie liczby a, b, c są podzielne przez d. Wynika z tego łatwo, że jeśli na końcu jedna z liczb a, b, c ma być równa n, to musi być $d|n$.
Załóżmy, że $(k,l)|n$ i $n \leq k+l \leq 2n$. Udowodnimy, że jeśli $(2n-x, x, 0) \in X$, to również $(2n-y, y, 0) \in X$, gdzie $y = x-k \pmod{l}$. Jeśli $x \geq k$, to wykonujemy ciąg czynności:

$$(2n-x, x, 0) \longrightarrow (2n-x, x-k, k) \longrightarrow (2n-x+k, x-k, 0).$$

Jeśli natomiast $x < k$, to postępujemy według schematu:

$$(2n-x, x, 0) \longrightarrow (2n-x, 0, x) \longrightarrow (2n-l-x, l, x) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (2n-l-x, l-(k-x), k) \longrightarrow (2n-l-x+k, l+x-k, 0)$$

(skorzystaliśmy po drodze z nierówności $k+l \leq 2n$). Ponieważ $(2n, 0, 0) \in X$, więc z powyższego wynika, że $(2n-x, x, 0) \in X$, gdzie x jest dowolną wielokrotnością liczby k modulo l.
W szczególności $(n+k, n-k, 0) \in X$, co pociąga za sobą $(n, n-k, k) \in X$. To dowodzi tezy zadania.