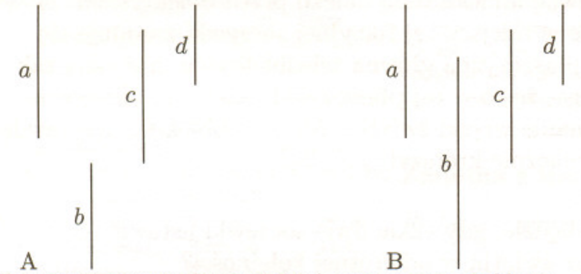
# O pewnej trudności w rysowaniu odcinków

*Krzysztof OLEŚ*

Spróbujmy zmierzyć się z dziwnym zadaniem... Narysować na płaszczyźnie skończoną rodzinę odcinków (odcinki te mogą być dowolne: domknięte, otwarte, domknięto-otwarte) parami równoległych, w taki sposób, aby każde trzy z nich przecinała prosta.

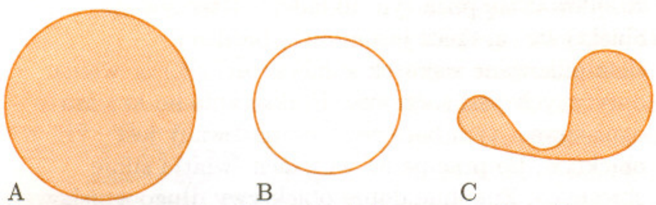



Na powyższym rysunku: w części A mamy pewne problemy (np. odcinki: $a, b, d$), w części B wszystko w porządku.

Zróbmy dodatkowe założenie: odcinki należy narysować tak, aby nie istniała prosta przecinająca je wszystkie. Chwila przerwy – chwila namysłu – chwila folgowania naszemu ukrytemu talentowi plastycznemu i... Zadanie jest niewykonalne? **Zadanie jest niewykonalne!** To właśnie postaramy się udowodnić. Skorzystamy z ciekawego twierdzenia geometrii kombinatorycznej, którego dowód (w przypadku płaszczyzny) znajduje się w znakomitej książce Jarosława Górnickiego [1].

**Twierdzenie 1** (Helly, 1913)
*Jeśli $\mathcal{F}$ jest skończoną, co najmniej* (n+1)*-elementową, rodziną podzbiorów wypukłych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o tej własności, że każda jej* (n+1)*-elementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to cała rodzina $\mathcal{F}$ ma przekrój niepusty.*

Przypomnijmy, iż zbiór nazywamy wypukłym, jeśli z dowolnymi dwoma swoimi punktami zawiera łączący je odcinek domknięty.

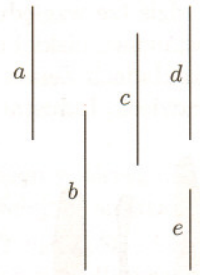



Na powyższym rysunku: figura A jest zbiorem wypukłym, figury B i C nie są zbiorami wypukłymi.

Kiedy znamy już twierdzenie Helly'ego, możemy sformalizować nasz rysunkowy problem.

**Twierdzenie 2** (o transwersali)
*Niech $\mathcal{F}$ będzie skończoną, co najmniej trójelementową, rodziną parami równoległych odcinków na płaszczyźnie. Jeśli każde trzy odcinki tej rodziny przecina prosta, to istnieje prosta* (to właśnie jest transwersala) *przecinająca wszystkie odcinki rodziny $\mathcal{F}$.*

**Dowód:**
Najpierw pewne założenia (czym byłaby matematyka bez założeń?). Na rozważanej płaszczyźnie wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych i zakładamy, że odcinki (co najmniej trzy) są równoległe do osi rzędnych. Bez straty ogólności możemy założyć, że rozważane odcinki są domknięte (dlaczego?). Ponadto wykluczamy przypadek, iż któreś dwa odcinki danej rodziny „leżą jeden nad drugim". Gdyby tak było, to założenia twierdzenia pociągałyby za sobą współliniowość wszystkich odcinków (dlaczego?).




Tak przecież być nie może...

Przystąpmy teraz do sedna sprawy.
Niech $\mathcal{F}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}, s\geq 3$; przy czym:
$\forall_{i\in\{1,\ldots,s\}}\exists_{u_i,v_i,w_i\in\mathbb{R}}$

$$\alpha_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=u_i, v_i\leq y\leq w_i\}.$$

Nasze dotychczasowe rozważania implikują także dodatkowy warunek:

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,s\}}\quad i\neq j\Rightarrow u_i\neq u_j.$$

Dla $i\in\{1,\ldots,s\}$ definiujemy:

$$K_i=\{(k,d)\in\mathbb{R}^2 : v_i\leq ku_i+d\leq w_i\}.$$

Zauważmy, że $(k,d)\in K_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $y=kx+d$ przecina odcinek $\alpha_i$. Rodzina $\mathcal{C}=\{K_1,\ldots,K_s\}$ jest co najmniej trójelementową rodziną zbiorów wypukłych (stwierdzenie wypukłości dowolnego elementu $\mathcal{C}$ jest prostym ćwiczonkiem), której dowolna trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty. Nie pozostaje nic innego, jak zastosować twierdzenie Helly'ego (jest to tak piękne, iż powstał nawet niezamierzony rym)

$$\exists_{(k_0,d_0)\in\mathbb{R}^2}\quad (k_0,d_0)\in\bigcap\mathcal{C}.$$

Powyższy warunek oznacza, że szukaną prostą jest (przykładowo – twierdzenie Helly'ego nie mówi zbyt wiele o liczności przekroju rodziny $\mathcal{F}$) ta o równaniu $y=k_0x+d_0$.

Po tym krótkim rozważaniu pozostaje jednak w głowie pewne pytanie dotyczące narzędzia, którym się posłużyliśmy:
*Czy twierdzenie Helly'ego jest prawdziwe dla rodzin nieskończonych?*

Odpowiedź można znaleźć na stronie 4.

**Bibliografia:**

[1] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995.
[2] F.A. Valentine, *Convex Sets*, New York 1964.