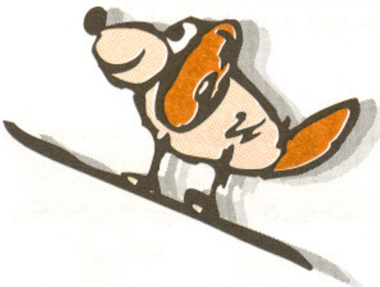
Liczby Stirlinga a skoki narciarskie

Adam WORYNA



Przed niespełna rokiem mieliśmy wszyscy okazję podziwiać fenomenalne skoki Adama Małysza na dużej i średniej skoczni w Lahti. Gdy oglądałem popisy naszej gwiazdy, nasunął mi się następujący problem: ilu średnio skoczków, podczas jednej takiej serii skoków, zdobędzie tytuł lidera. Liderem, w każdym momencie konkursu, nazwiemy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Zawodnicy, zgodnie z regulaminem, startują kolejno według ustalonego wcześniej porządku i każdy z nich wykonuje jeden skok. Ponadto przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne oraz każda kolejność końcowa jest jednakowo prawdopodobna (nie ma faworytów).

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą zawodników biorących udział w konkursie. Kluczem do rozwiązania postawionego problemu jest obliczenie dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ prawdopodobieństwa zdarzenia, że podczas całego konkursu dokładnie k skoczków zdobędzie tytuł lidera. Zgodnie z definicją, zawodnik z pierwszym numerem startowym na pewno zdobędzie tytuł lidera. Stąd liczba liderów w konkursie będzie na pewno większa od zera. Możemy przyjąć, że każdego skoczka ocenia się w skali od 1 do n punktów. Ponieważ uzyskane wyniki są różne, więc końcowa klasyfikacja skoków jest pewną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ określoną następująco: i-ta pozycja tej permutacji to ocena zawodnika z i-tym numerem startowym ($i = 1, \ldots, n$).

Dla dowolnej permutacji $w_1, \ldots, w_n$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ możemy jednoznacznie określić następujący ciąg wskaźników: $l_1 = 1$ oraz dla $i > 1$ wyraz l_i jest najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $w_{l_i} > w_{l_{i-1}}$ (o ile taki wskaźnik istnieje). Długość tak określonego ciągu zależy od danej permutacji i na pewno jest nie większa niż n. Zauważmy, że jeżeli długość ta jest równa k, to permutacja przedstawia końcową klasyfikację w konkursie, w którym dokładnie k skoczków miało tytuł lidera. Permutację taką nazwiemy *permutacją stopnia n z k liderami.* Dla dowolnych liczb całkowitych $n \geq 1$ i $k \geq 0$ oznaczmy przez $S(n, k)$ liczbę wszystkich permutacji stopnia n z k liderami. Z wcześniejszych rozważań wynika, że

(1) $$S(n, k) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad k = 0 \quad \text{lub} \quad k > n$$

oraz

(2) $$S(1, 1) = 1.$$

Załóżmy więc dalej, że $n \geq 2$ i $1 \leq k \leq n$. Podzielmy wszystkie permutacje stopnia n z k liderami na dwie rozłączne klasy: A i B. Do klasy A zaliczymy permutacje, w których na pierwszej pozycji znajduje się jedynka, a do klasy B – wszystkie pozostałe permutacje.

Policzmy teraz permutacje w klasie A. Zauważmy, że jeżeli w każdej takiej permutacji usuniemy liczbę 1 (znajdującą się na pierwszej pozycji), a następnie każdą z pozostałych liczb zmniejszymy o 1, to uzyskamy pewną permutację stopnia $n-1$ z $k-1$ liderami. Co więcej, powyższe przekształcenie wyznacza bijekcję między zbiorem permutacji klasy A a zbiorem permutacji stopnia $n-1$ z $k-1$ liderami. Stąd klasa A składa się z $S(n-1, k-1)$ permutacji.

Policzmy z kolei permutacje w klasie B. W tym celu dla dowolnie ustalonego $s \in \{2, \ldots, n\}$ policzmy te permutacje klasy B, w których jedynka znajduje się na pozycji s-tej. Zauważmy, że jeżeli w takiej permutacji usuniemy jedynkę, a następnie każdą z pozostałych liczb zmniejszymy o 1, to otrzymamy pewną permutację stopnia $n-1$ z k liderami (usunięta jedynka nie była w tym przypadku oceną lidera). Podobnie jak poprzednio, powyższe przekształcenie wyznacza bijekcję między permutacjami klasy B, w których jedynka znajduje się na s-tej pozycji, a permutacjami stopnia $n-1$ z k liderami. Ponieważ liczba s może przyjmować $n-1$ wartości, więc klasa B składa się z $(n-1) \cdot S(n-1, k)$ permutacji. Stąd otrzymujemy wzór rekurencyjny

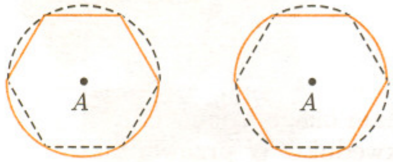
(3) $$S(n, k) = (n-1) \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1) \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \ \text{i} \ 1 \leq k \leq n.$$

Rozwiązanie zadania M 972.
Liczby $k = 7$ i $l = 12$ są dobre. Można to łatwo sprawdzić, znajdując wszystkie możliwe sytuacje (jest ich 20) i wykazując, że znaleziony zbiór jest zamknięty ze względu na wszystkie operacje przelewania (najlepiej narysować graf wszystkich możliwych sytuacji i połączeń pomiędzy nimi). Wśród wszystkich możliwych sytuacji nie ma takiej, w której w jednym z garnków jest 8 litrów zupy.

Uwaga: Ciekawym zadaniem wydaje się znalezienie warunku koniecznego i dostatecznego w przypadku ogólnym. Ja odpowiedzi nie znam. A może Czytelnicy rozwiążą ten problem?

Czytelnicy piszą

Oto para zbiorów wypukłych, których równoległe cięciwy poprowadzone przez dany punkt są równej długości.



Jest to jeden z przykładów nadesłanych nam przez Pana Mariusza Nawłatynę (patrz *Delta* 3 i 8/2001). Dziękujemy.

Redakcja

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia, że podczas całego konkursu dokładnie k skoczków zdobędzie tytuł lidera, wynosi

$$\frac{S(n,k)}{n!},$$

gdzie $S(n,k)$ jest określone rekurencyjnie równościami (1), (2), (3). Poszukiwana wartość oczekiwana liczby liderów jest równa

$$\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} i\cdot S(n,i). \tag{4}$$

Równości (1), (2), (3) generują tzw. *liczby Stirlinga pierwszego rodzaju* (posługuję się tu definicją pochodzącą z książki „Matematyka konkretna" autorstwa: R. L. Graham, D. Knuth, O. Patashnikow – str. 288). W literaturze matematycznej najczęściej spotyka się je przy wyznaczaniu liczby permutacji, które mają ustaloną liczbę cykli w rozkładzie na cykle lub też przy wyznaczaniu wartości współczynnika przy danej potędze x w wielomianie $W(x) = x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$. Jak dotychczas, nie udało się znaleźć zgrabnego wzoru na te liczby. Okazuje się jednak, że mają one wiele ciekawych własności. Przede wszystkim zachodzi, oczywista niemal, równość

$$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) = n! \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots \tag{5}$$

Bardziej interesująca dla nas okaże się z pewnością tożsamość

$$\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} i\cdot S(n,i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}, \tag{6}$$

która stwierdza, że wartość oczekiwana liczby liderów w konkursie jest równa tzw. *n-tej liczbie harmonicznej.* Równość (6) można udowodnić metodą indukcji matematycznej. Poniżej jednak pokażę nieco inny sposób. Dla $n = 1,2,3,\ldots$ oznaczmy przez $L(n)$ sumę (4). Dla $k = 1,2,\ldots,n$ pomnóżmy przez k każdą ze stron równości (3). Dodając stronami wszystkie otrzymane w ten sposób równości, dostajemy (po zredukowaniu i skorzystaniu w pewnym momencie z (5))

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot S(n,k) = (n-1)! + n\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot S(n-1,k) \quad \text{dla} \quad n = 2,3,\ldots \tag{7}$$

Dzieląc obie strony (7) przez $n!$ dostajemy: $L(n) = 1/n + L(n-1)$ dla $n = 2,3,\ldots$, co w połączeniu z równością $L(1) = 1$ daje nam: $L(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, czyli tożsamość (6). Wszystkie powyższe rozważania biorą jednak w łeb, kiedy na skoczni pojawia się Adam Małysz...

Rozwiązanie zadania F 559.

W fotosferze atomy wodoru mają prędkość średnią kwadratową (pierwiastek średniego kwadratu prędkości)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1{,}2\cdot 10^4\ \mathrm{m/s},$$

gdzie μ jest masą cząsteczkową gazu. Druga prędkość kosmiczna wynosi

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}} \approx 6{,}1\cdot 10^5\ \mathrm{m/s}.$$

Zatem średnia prędkość kwadratowa jest około 50 razy mniejsza od drugiej prędkości kosmicznej, więc większość atomów wodoru nie może wyrwać się z pola grawitacyjnego Słońca.

Rozwiązanie zadania F 560.

Grubość fotosfery jest niewielka, zatem możemy założyć jej stałą gęstość i zaniedbać zmiany przyspieszenia grawitacyjnego (spadku swobodnego). Aby fotosfera znajdowała się w równowadze, ciśnienie hydrostatyczne musi być równoważone przez ciśnienie gazu, tzn.

$$p = \rho g_\odot h = \rho\frac{RT}{\mu}.$$

Ostatecznie

$$h = \frac{RT}{\mu g_\odot} \approx 1{,}7\cdot 10^5\ \mathrm{m} = 170\ \mathrm{km}.$$