Γ-limatias 11/01 (47)

Z okazji Gammalimatiasu numer **47** przedstawiamy więcej niż $\mathbf{4}+\mathbf{7}$ własności liczby **47**.

1. Liczba **47** nie powstaje z byle czego, mamy bowiem równość $\mathbf{47}=37+3+7$. O przecudnej liczbie 37 pisaliśmy na przełomie tysiącleci.

2. Sumę sześcianów cyfr liczby **47** oblicza się bardzo łatwo, wystarczy wpisać zero pomiędzy jej cyfry: $\mathbf{4}^3+\mathbf{7}^3=\mathbf{4}0\mathbf{7}$.

3. Jeżeli p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą, to $p_{15}=\mathbf{47}$. Przy tym $p_{1\cdot 5}=\mathbf{4}+\mathbf{7}$.

4. Nie dość, że **47** jest pierwsza, to dzieląc ją przez 2 i zaokrąglając wynik w dół otrzymujemy liczbę pierwszą, a mianowicie 23. Można powtarzać tę operację otrzymując dalsze liczby pierwsze: 11, 5, 2. Następną liczbą o takiej własności jest 1439.

5. Liczba **47** jest kwadratem liczby **7** pomniejszonym o dwa. Jej połowa (zaokrąglona w dół) też jest kwadratem pomniejszonym o 2. Liczba **7** też jest kwadratem pomniejszonym o 2. Kwadrat liczby **47** pomniejszony o 2 daje liczbę pierwszą 2207, ta zaś po podniesieniu do kwadratu i pomniejszeniu o 2 daje **48708**4**7**. Co prawda liczba ta jest złożona, ale jej najmniejszy dzielnik pierwszy 1087 jest kwadratem pomniejszonym o 2.

6. Pierwiastkiem pierwotnym *modulo* p, gdzie p jest liczbą pierwszą, nazywamy każdą taką resztę $0\le r\le p-1$, że r^k-1 nie dzieli się przez p dla żadnego $1\le k<p-1$, natomiast $r^{p-1}-1$ dzieli się przez p. Odnotujmy przy tym, że dla $r\neq 0$ ta ostatnia podzielność wynika z małego twierdzenia Fermata. Spośród **47** reszt *modulo* **47** pierwiastkami pierwotnymi są: 5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45. Nietrudno policzyć, że pierwiastków pierwotnych jest 22, co stanowi około **47**% wszystkich reszt.

7. Po raz pierwszy liczba pierwiastków pierwotnych jest mniejsza od 1/4 liczby wszystkich reszt dla $p_{\mathbf{47}}=211$. Liczba pierwiastków pierwotnych *modulo* $p_{\mathbf{47}}$ jest równa $\mathbf{47}+1$.

8. Reszty *modulo* **47** można przypisać nie tylko liczbom całkowitym, ale także liczbom wymiernym o mianowniku niepodzielnym przez **47**, np. liczbie 2/3 odpowiada reszta 32, gdyż

$$\frac{2}{3}\equiv\frac{96}{3}=32(\text{mod } \mathbf{47})\,.$$

Okazuje się, że liczb wymiernych, które w postaci nieskracalnej mają licznik i mianownik nie przekraczający 6, jest **47** i są one we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z resztami *modulo* **47**.

0	0	12	1/4	24	1/2	36	3/4
1	1	13	5/4	25	3/2	37	−3/5
2	2	14	−5/3	26	5/2	38	2/5
3	3	15	−2/3	27	−6/5	39	−1/6
4	4	16	1/3	28	−1/5	40	5/6
5	5	17	4/3	29	4/5	41	−6
6	6	18	−4/5	30	−4/3	42	−5
7	−5/6	19	1/5	31	−1/3	43	−4
8	1/6	20	6/5	32	2/3	44	−3
9	−2/5	21	−5/2	33	5/3	45	−2
10	3/5	22	−3/2	34	−5/4	46	−1
11	−3/4	23	−1/2	35	−1/4		

9. Liczba **47** jest ósmym elementem ciągu Lucasa określonego wzorami

$$L_1=1,\quad L_2=3,\quad L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\,.$$

Średnio co piętnasty element ciągu Lucasa ma końcówkę **47**.

10. Ciąg z zadania 4 z finału XLIX Olimpiady Matematycznej, określony wzorami

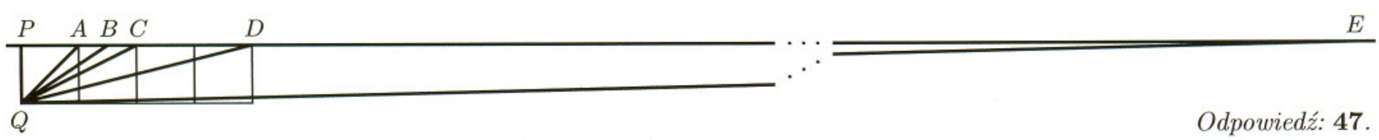
$$a_1=1,\quad a_n=a_{n-1}+a_{[n/2]}\,,$$

także nie obywa się bez liczby **47**, mamy bowiem $a_{12}=\mathbf{47}$.

11. Gdyby *Delta* była numerowana liczbami pierwszymi, dziś po raz pierwszy czytalibyście *Deltę* o numerze większym od $\mathbf{47}^2$. Mamy bowiem

$$p_{329}=2207<\mathbf{47}^2=2209<p_{330}=2213\,.$$

12. Zadanie: W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym $\measuredangle PQA+\measuredangle PQB+\measuredangle PQC=$ $=\measuredangle PQD+\measuredangle PQE$. Obliczyć PE.



Odpowiedź: **47**.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl