Klub 44

$$\otimes\sqrt{\text{∮}!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2001

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z matematyki nr 427, 428

Redaguje Marcin E. KUCZMA

427. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n \cos^2 x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Znaleźć wykładnik p, dla którego ciąg $(n^p x_n)$ ma granicę dodatnią, skończoną, i obliczyć tę granicę.

428. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$. Dla dowolnego niepustego zbioru $J \subset \{1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez s_J sumę wszystkich liczb a_j o numerach $j \in J$. Udowodnić, że

$$\sum_J s_J^2 \le (n+1)2^{n-2} \sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

(symbol J w pierwszym sumowaniu przebiega rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$).

Zadanie **428** zaproponował pan Marcin Peczarski z Latchorzewa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2001

Przypominamy treść zadań:

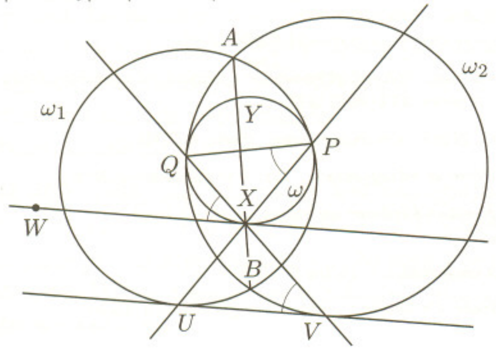
423. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi przecinające się w punktach A i B. Dowieść, że istnieją cztery punkty Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 o następującej własności: jeżeli ω jest dowolnym okręgiem stycznym do obu danych okręgów (punkty styczności: P i Q) oraz przecinającym prostą AB (punkty przecięcia: X i Y), to każda z prostych PX, PY, QX, QY przechodzi przez jeden z punktów Z_i.

424. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunki: $f(2) = 2$ oraz

$$f(xy) = x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 - xy \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

423. Oznaczmy dane dwa okręgi przez ω_1 i ω_2. Niech ω będzie okręgiem stycznym do ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach P i Q oraz przecinającym prostą AB w punktach X i Y. Skoro przecina tę prostą, musi być styczny do obu okręgów ω_1, ω_2 jednocześnie albo zewnętrznie, albo wewnętrznie. W przypadku styczności wewnętrznej okrąg ω albo obejmuje okręgi ω_1, ω_2, albo jest przez nie oba obejmowany. Tę ostatnią sytuację przedstawia rysunek; dalsze rozumowanie jest poprawne w każdym z pozostałych przypadków i nie wymaga żadnej modyfikacji.

Przyjmijmy, że prosta PX przecina okrąg ω_1 ponownie w punkcie U, a prosta QX przecina okrąg ω_2 ponownie w punkcie V. Ze związków $|UX| \cdot |PX| = |AX| \cdot |BX| = |VX| \cdot |QX|$ wynika, że trójkąty XPQ i XVU są podobne; zatem $|\angle XPQ| = |\angle XVU|$.



Przez punkt X prowadzimy prostą styczną do okręgu ω w punkcie X i zaznaczamy na niej dowolny punkt W po tej samej stronie prostej AB co punkt Q. Otrzymujemy równość $|\angle WXQ| = |\angle XPQ| = |\angle XVU|$, która pokazuje, że prosta XW jest równoległa do UV.

Weźmy pod uwagę jednokładność o środku P, przekształcającą okrąg ω na ω_1, oraz jednokładność o środku Q, przekształcającą okrąg ω na ω_2. Obrazem prostej XW odpowiednio w pierwszej oraz w drugiej jednokładności jest prosta styczna do ω_1 w punkcie U oraz prosta styczna do ω_2 w punkcie V. Obie te proste (obrazy prostej XW) są do niej równoległe. Pokrywają się więc z prostą UV, która wobec tego jest wspólną styczną do okręgów ω_1 i ω_2.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić zastępując punkt X przez Y. Wniosek: biorąc jako Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 punkty styczności okręgów ω_1 i ω_2 z ich wspólnymi stycznymi, otrzymujemy czwórkę punktów o wymaganej własności.

424. Niech f będzie funkcją spełniającą podane warunki. Lewa strona równania jest symetryczna względem x, y, więc prawa strona też:

$$x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 = y^3 f(x) + x^2 f(y) + xy^3 + x^2 y.$$

Podstawiając $y = 2$ dostajemy równanie, z którego wyznaczamy $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że znaleziona funkcja spełnia warunki zadania, jest więc jego jedynym rozwiązaniem.

Zadania z fizyki nr 324, 325

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2001

324. Cząstka o masie m_1 zderzyła się ze spoczywającą cząstką o masie m_2, przy czym $m_1 > m_2$. Jaki jest maksymalny możliwy kąt odchylenia pierwszej cząstki od kierunku początkowego? Zakładamy, że prędkości cząstek są znacznie mniejsze od prędkości światła.

325. W oscyloskopie elektrony są przyspieszane napięciem $U = 300\,\mathrm{V}$, po czym biegną do ekranu oddalonego o $l = 30$ cm. Zakładamy, że oscyloskop nie ma żadnego ekranowania magnetycznego.

a) Oscyloskop umieszczono na równiku, gdzie pole magnetyczne ma kierunek poziomy, a jego indukcja wynosi $1{,}75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$. Po jakim torze porusza się plamka na ekranie, jeśli oscyloskop powoli obracamy wokół osi pionowej? Podać wartości parametrów opisujących ten tor. Dane: ładunek elementarny wynosi $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, masa elektronu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

b) Jak zmieni się tor plamki, jeśli doświadczenie przeprowadzimy w miejscu, gdzie wektor indukcji ma wartość taką samą, jak podano wyżej, a jego kierunek tworzy kąt 60° z poziomem? Podać wartości parametrów toru.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **415** (WT = 1,14) i **416** (WT = 2,27)
z numeru 2/2001

Paweł Kubit	– Kraków	44,38
Witold Bednorz	– Tychy	43,35
Janusz Olszewski	– Suwałki	39,40
Adam Woryna	– Ruda Śląska	36,10
Witold Bednarek	– Łódź	34,51
Marcin Peczarski	– Latchorzew	34,49

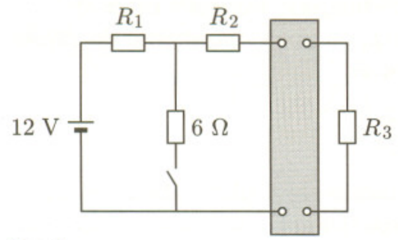
Paweł Kubit – po raz drugi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2001

Przypominamy treść zadań:

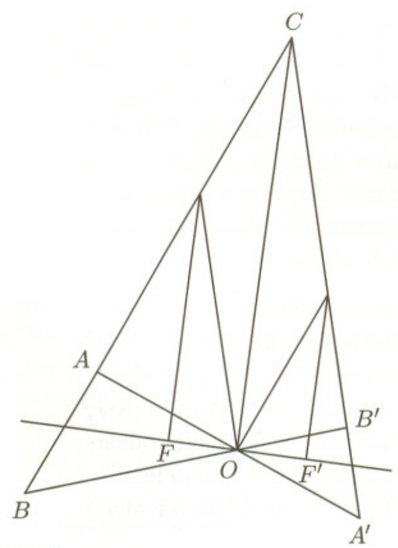
320. Dane są cztery punkty A, B, A' i B'. Opisać konstrukcję geometryczną pozwalającą wyznaczyć ogniska cienkiej soczewki, dla której obrazem rzeczywistym punktu A jest A', a obrazem rzeczywistym B jest B'.

321. „Czarna skrzynka" z czterema wyjściami zawiera wyłącznie oporniki. Włączono ją do obwodu przedstawionego na rysunku 1 i okazało się, że przy otwartym kluczu natężenie prądu czerpanego z baterii wynosiło 3 A, a prądu płynącego przez opornik R_3 – 1,8 A. Jeśli przy zamkniętym kluczu obwód czerpie z baterii prąd o natężeniu 4 A, to ile wynosi wtedy natężenie prądu płynącego przez opornik R_3? Opór jednego z oporników i SEM baterii są dane.



Rys. 1

320. Promienie przechodzące przez środek soczewki O nie zmieniają kierunku, dlatego musi on leżeć na przecięciu prostych AA' i BB'. Zauważmy dalej, że promień biegnący wzdłuż prostej BA należy zarówno do wiązki wybiegającej z A, jak i z B – dlatego po załamaniu w soczewce musi on przebiec przez oba punkty A' i B'. Punkt przecięcia prostych AB i $A'B'$ (oznaczmy go przez C) leży więc w płaszczyźnie soczewki, a prosta prostopadła do OC i przechodząca przez O jest osią optyczną soczewki. Innym wynikiem powyższego rozumowania jest to, że obrazem każdego punktu prostej AB jest odpowiedni punkt prostej $A'B'$; jeśli jeden z nich oddala się do nieskończoności, to drugi – zgodnie z równaniem soczewki – zbliża się do płaszczyzny ogniskowej. Konstruujemy więc ognisko w następujący sposób: prowadzimy przez O prostą równoległą do $A'B'$, a punkt jej przecięcia z prostą AB rzutujemy na oś optyczną (rysunek 2). Analogicznie wyznaczamy drugie ognisko.



Rys. 2

321. Oznaczmy przez R_2' opór prawej części obwodu, tzn. „czarnej skrzynki" wraz z opornikami R_2 i R_3. Z danych zadania wynika, że opór całego obwodu wynosi $4\,\Omega$ przy kluczu otwartym i $3\,\Omega$ przy kluczu zamkniętym. Pomijając jednostki możemy napisać układ równań

$$\begin{cases} 4 = R_1 + R_2' \\ 3 = R_1 + \dfrac{6R_2'}{R_2'+6}. \end{cases}$$

Znajdujemy $R_2' = 3\,\Omega$, co oznacza, że przy zamkniętym kluczu $\frac{1}{3}$ prądu czerpanego z baterii płynie przez opornik $6\,\Omega$ i klucz, a $\frac{2}{3}$ (czyli $\frac{8}{3}$ A) – przez prawą część obwodu. Z tej wartości przez R_3 przepływa $\frac{1{,}8}{3} = \frac{3}{5}$, czyli 1,6 A.