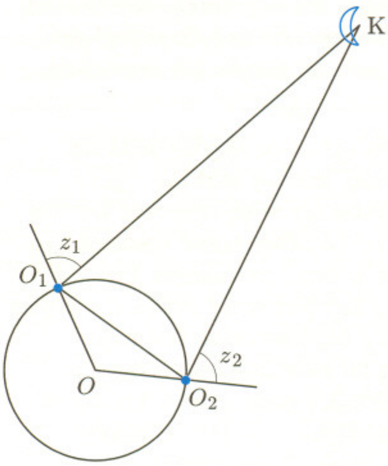
Jak blisko do Księżyca?



Długość bazy O_1O_2 oblicza się, mając współrzędne geograficzne obserwatorów O_1 i O_2 (i, oczywiście, promień Ziemi). Podobnie kąty w trójkącie OO_1O_2. Z pomiarów odległości zenitalnych Księżyca z_1 i z_2 można wtedy rozwiązać trójkąt O_1O_2K, a więc znaleźć odległość Księżyca.

Starożytny Kosmos dzielił się na świat podksiężycowy i nadksiężycowy. Dokładniej – podejrzewano, że deszcz, śnieg, tęcza, a może nawet komety to zjawiska zachodzące tuż przy ziemi (albo przy Ziemi), natomiast planety i gwiazdy osadzone na kryształowych sferach są tak odległe, że na temat ich odległości nic się nie da powiedzieć. Te dwa światy miały rządzić się każdy swoimi prawami, na początek więc chyba dobrze byłoby ustalić, gdzie przebiega granica między nimi.

Zjawisko paralaksy było już tak często omawiane w *Delcie*, iż istnieje obawa znużenia Czytelników tym zagadnieniem. Jest to jednak sprawa tak ważna, że nie można jej w tym numerze pominąć. Znajomość odległości Księżyca to pierwszy krok do poznania rzeczywistych rozmiarów Wszechświata, bez czego nie byłoby mowy o poznaniu fizycznych własności ciał niebieskich.

Pomiar odległości za pomocą dalmierza jest metodą „najuczciwszą", bo sprowadza się do skorzystania z najprostszej geometrii. Formalnie paralaksą geocentryczną (dodaje się tu jeszcze: horyzontalną) obiektu nazywa się kąt, pod jakim byłoby z niego widać promień Ziemi. Kąt ten można wyznaczyć na podstawie obserwacji położenia na niebie obiektu widzianego z dwóch dość dowolnych miejsc na powierzchni Ziemi. Wtedy znając jeden bok trójkąta rozpięty między tymi dwoma miejscami (bazę dalmierza) i oba kąty do niego przyległe, można bez trudu obliczyć pozostałe elementy trójkąta (patrz rysunek). Dobrym przybliżeniem paralaksy (w radianach) jest stosunek średnicy Ziemi do odległości obiektu od środka Ziemi (którą można wtedy obliczyć).

Nic więcej nie jest tu potrzebne i można mieć jedynie trudności techniczne z przyzwoitym wyznaczeniem którejś wielkości. W Starożytności nie sposób było zsynchronizować obserwacji Księżyca wykonywanych przez dwóch obserwatorów, których dzieliłaby odległość kilku tysięcy kilometrów. Jeden obserwator mógł natomiast wykorzystać fakt, że widząc Księżyc o wschodzie i zachodzie, widzi go z miejsc, które dzieli średnica Ziemi (a jeśli nie Ziemi, to w każdym razie średnica równoleżnika, na którym znajduje się obserwator). Niestety, w czasie od swojego wschodu do zachodu Księżyc nieco przesuwa się po orbicie i niełatwo było oddzielić skutek jego ruchu orbitalnego od skutku ruchu obrotowego Ziemi. W dodatku moment wschodu i zachodu fałszuje refrakcja (załamanie światła w atmosferze Ziemi), która dla ciał niebieskich na horyzoncie przekracza pół stopnia, a jest to wielkość porównywalna z wielkością samej paralaksy geocentrycznej. Lepiej jest, gdy wysokość Księżyca w górowaniu mierzą dwaj obserwatorzy, ale znajdujący się dość dokładnie na jednym południku – obserwacje takie są zsynchronizowane automatycznie. Niewątpliwie z powodu tych wszystkich kłopotów technicznych Arystarch (320–250 r. p.n.e.) zdołał wprawdzie odległość Księżyca ocenić, ale ta jego ocena (9 średnic Ziemi) mocno rozminęła się z rzeczywistością. Podobno sam Arystarch przywiązywał większą wagę do matematycznego rozwiązania problemu niż do realności wyników wyznaczeń; zresztą były to prace pionierskie i ich wyników nie było wtedy z czym porównywać.

Potem pojawił się Eratostenes (275–194 r. p.n.e.), który na podstawie pomiarów kąta padania promieni słonecznych w różnych miejscach położonych na jednym południku wyznaczył rozmiary Ziemi z budzącą podziw dokładnością. Skoro więc później Hipparch (190–125 r. p.n.e.) ocenił odległość Księżyca na $33\frac{2}{3}$ średnicy Ziemi (dziś wiadomo, że jest to średnio 30,2), można uznać, że granica między światem podksiężycowym i nadksiężycowym została w Starożytności określona wprost świetnie (Ptolemeusz (100–160 r.) przyjmował 29,5 średnicy Ziemi). Współczesne laserowe pomiary odległości Księżyca to tylko zdobywanie kolejnych cyfr po przecinku. Dziś wiemy, że ta najmniejsza naturalna kosmiczna odległość wynosi (średnio) 384 400 km, czemu odpowiada paralaksa geocentryczna $57'02'',5$. Dla światła to nieco ponad sekunda, ale – jak pamiętamy – był to wielki krok ludzkości.

T.K.

Rozwiązanie zadania M 967.
Za pomocą prostej indukcji wykazujemy, że $1 < a_n < 3$. Jeśli $x \in (1,3)$, to $4 - \frac{3}{x} > x$, skąd wynika, że $a_{n+1} > a_n$. Tak więc (a_n) jest ciągiem rosnącym i ograniczonym, a więc zbieżnym. Oznaczmy granicę naszego ciągu przez g. Przechodząc w równaniu $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$ do granicy $n \to \infty$, otrzymamy $g = 4 - \frac{3}{g}$, czyli $g \in \{1, 3\}$. 1 odpada, bo $g > a_1 = 2$. Tak więc $g = 3$.

Rozwiązanie zadania M 968.
Funkcja $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = (1 - \frac{1}{m})x + \frac{a}{mx^{m-1}}$ ma minimum globalne w punkcie $\sqrt[m]{a}$. Wynika stąd, że $a_n \geq \sqrt[m]{a}$ dla wszystkich $n \geq 2$. Poza tym dla każdego $x \geq \sqrt[m]{a}$ zachodzi $f(x) \leq x$. Zatem (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu, czyli zbieżny. Jeśli g jest granicą ciągu, to przechodząc z n do ∞ otrzymujemy $g = (1 - \frac{1}{m})g + \frac{a}{mg^{m-1}}$, czyli $g = \sqrt[m]{a}$.