Zadanie Euklidesa

Jarosław GÓRNICKI

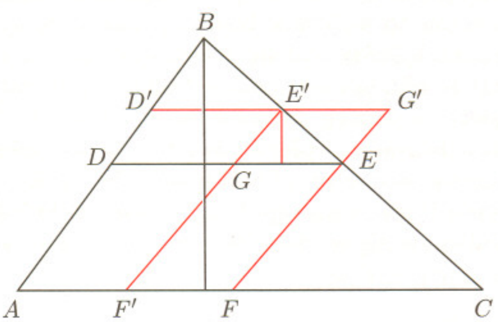
W starożytnej Grecji problemy matematyczne formułowano i rozwiązywano w języku geometrycznym. Umożliwiało to wizualizację ówczesnej matematyki – posługiwanie się sugestią rysunku. Z przekazów, które dotrwały do naszych czasów, możemy się przekonać o kunszcie ówczesnych mistrzów. Rozwiązania problemów, nad którymi pracowali starożytni matematycy, są zazwyczaj tak doskonałe, że późniejsze pokolenia niewiele mogły je ulepszyć. Spektakularny jest tutaj przykład *Elementów* Euklidesa (uczonego działającego około 300 roku p.n.e. w Aleksandrii za czasów panowania w Egipcie króla Ptolemeusza I Sotera), w których przedstawione są podstawy planimetrii, arytmetyki i stereometrii. Zaprezentowane tam środki z powodzeniem można wykorzystać do rozwiązywania (na drodze geometrycznych rozważań) pewnych zagadnień ekstremalnych, czyli wyznaczania wielkości (obiektów) największych albo najmniejszych. Tego typu problematyka, m.in. za sprawą prac Zenodora (III/II w. p.n.e.), powoli zyskiwała coraz większe znaczenie. Jej rozkwit nastąpił dopiero w XVII wieku wraz z rozwojem rachunku różniczkowego. Oto przykład zadania na ekstremum, przypisywanego Euklidesowi. Porównajmy metody jego rozwiązania, które oddziela 2000 lat naszego rozwoju.

Zadanie Euklidesa. W dany trójkąt ABC wpisać równoległobok $ADEF$ ($EF \parallel AB$, $DE \parallel AC$) o największym polu.

Rozwiązanie geometryczne tego zadania polega na wyróżnieniu równoległoboku, który mógłby być jego rozwiązaniem (wybór ten jest intuicyjny lub następuje na drodze analizy warunków zadania), a następnie na wykazaniu, że każdy inny równoległobok jest „gorszy".

Rozwiązanie geometryczne

Największe pole ma równoległobok $ADEF$, gdy punkty D, E i F połowią odpowiednie boki trójkąta ABC.



Niech $AD'E'F'$ będzie równoległobokiem wpisanym w trójkąt ABC, różnym od $ADEF$. Wówczas pole równoległoboku $AD'E'F'$ jest mniejsze od pola równoległoboku $ADEF$ o pole równoległoboku $EG'E'G$. Rzeczywiście, z podobieństwa trójkątów $\triangle GE'E \sim \triangle ABC$ ($E'G \parallel AB$, $GE \parallel AC$) wynika

$$\frac{H_1}{|GE|} = \frac{H}{|AC|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H_1}{\frac{H}{2}} = \frac{|GE|}{\frac{|AC|}{2}},$$

gdzie H jest wysokością trójkąta ABC, H_1 wysokością trójkąta $GE'E$. Relacje te oznaczają, że pole równoległoboku $D'G'ED$ o wysokości H_1 i boku długości $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$ jest równe polu równoległoboku $EGF'F$, którego wysokość wynosi $\frac{1}{2}H$ i dla którego $|F'F| = |GE|$, co kończy dowód.

Rozwiązanie analityczne

Przy takich samych oznaczeniach niech $|AC| = b$, $|AF| = x$, wysokość zaś trójkąta BDE opuszczoną z wierzchołka B oznaczmy przez $h(x)$. Wówczas pole równoległoboku $ADEF$ jako funkcja zmiennej x, gdzie $0 \leq x \leq b$, dane jest wzorem $P(x) = (H - h(x))x$. Podobieństwo trójkątów $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ($DE \parallel AC$) implikuje, że $\dfrac{h(x)}{H} = \dfrac{x}{b}$, więc pole wpisanego równoległoboku opisuje funkcja

$$P(x) = \frac{Hx(b-x)}{b}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Ponieważ

$$P'(x) = \frac{H(b-2x)}{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b}{2},$$

więc punktami krytycznymi są 0, $\frac{1}{2}b$, b i, jak łatwo obliczyć, maksimum funkcji $P(x)$ jest realizowane dla $x = \frac{1}{2}b$. Oznacza to, że równoległobok $ADEF$ ma największe pole, gdy punkt F jest środkiem odcinka AC.

* * * * *

Oba te rozwiązania mają swój urok. Oczywiście, druga z prezentowanych metod ma bardziej uniwersalny charakter. Jednak jej stosowanie wymaga dużo większej wiedzy. Rozwiązanie geometryczne jest elementarne!