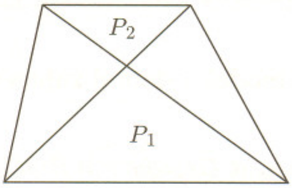
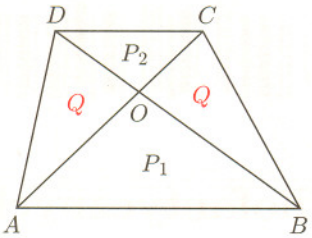
Oceńcie sami





Zadanie to można również znaleźć w *Repetytorium* Danuty i Marka Zakrzewskich wydanym przez WSz PWN.

Podczas treningu do nowej matury w jednej z zaprzyjaźnionych szkół trafiło się zadanie, którego treść pozwolimy sobie przedstawić na rysunku: w trapezie znane jest pole P_1 i pole P_2; należy obliczyć pole trapezu. No to obliczyliśmy.

Sposób I, geometryczny.

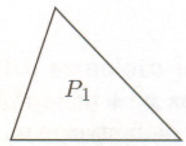
Korzystając z tego, że trójkąty mające wspólną wysokość mają pola proporcjonalne do podstaw, stwierdzamy, że oba pola, nienazwane przez autorów zadania, są równe (bo uzupełniają P_1 do pola trójkąta ABC lub ABD) oraz

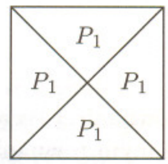
$$\frac{P_1}{Q} = \frac{AO}{OC} = \frac{Q}{P_2},$$

skąd mamy $Q = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$ i ostatecznie pole trapezu jest równe $P_1 + 2\sqrt{P_1}\sqrt{P_2} + P_2$ lub, jak kto woli, $(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.

Sposób II, nietrywialny.

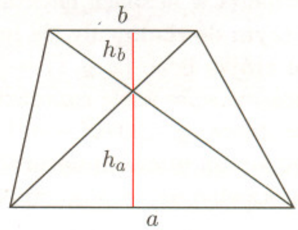
Pole jest funkcją wielkości P_1 i P_2. Zastanówmy się, co to za funkcja. Ponieważ wynik nie zależy od podobieństwa, więc jest to funkcja jednorodna kwadratowa i symetryczna zmiennych $\sqrt{P_1}$ i $\sqrt{P_2}$, słowem, powinna to być funkcja postaci $a(\sqrt{P_1})^2 + b\sqrt{P_1}\sqrt{P_2} + a(\sqrt{P_2})^2$.





Biorąc pod uwagę trójkąt (czyli zostało tylko P_1), otrzymujemy $a = 1$. Dla odmiany kwadrat (wszystkie cztery trójkąty równe) wobec poprzedniego daje nam $b = 2$. Wynik jest więc ten sam.

Sposób III, arytmetyczny.



Ze względu na to, że wynik nie zależy od rozmiaru trapezu, lecz tylko od jego kształtu, dla pewnego α mamy (oznaczenia z rysunku) $a = \alpha\sqrt{P_1}$. Ponieważ $P_1 = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, więc $h_a = \frac{2}{\alpha}\sqrt{P_1}$. Wobec podobieństwa dolnego i górnego trójkąta mamy $b = \alpha\sqrt{P_2}$ i $h_b = \frac{2}{\alpha}\sqrt{P_2}$. Zatem pole trapezu jest równe

$$\frac{1}{2}(a+b)(h_a+h_b) = \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}) \cdot \frac{2}{\alpha}(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}) = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

Te nasze popisy uznaliśmy za godne zanotowania, bo znamy

Sposób IV, firmowy.

Jest on (po wygładzeniu) taki. Chcemy obliczyć $\frac{1}{2}(a+b)(h_a+h_b)$. Wykonując mnożenie, otrzymujemy $P_1 + \frac{1}{2}(ah_b + bh_a) + P_2$. Zauważmy jednak, że z podobieństwa trójkątów uzyskujemy

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b}, \quad \text{czyli} \quad ah_b = bh_a.$$

Z kolei

$$\frac{ah_a}{2} \cdot \frac{bh_b}{2} = P_1P_2, \quad \text{czyli} \quad (ah_b)^2 = 4P_1P_2.$$

Zatem $\frac{1}{2}(ah_b + bh_a) = 2\sqrt{P_1P_2}$ i wynik jest (oczywiście) ten sam.

Jak wiadomo, prace maturalne są sprawdzane przez odpowiednio wytrenowanych egzaminatorów i według szczegółowych instrukcji przewidujących odpowiednią liczbę punktów za wykonanie kolejnych kroków rozumowania (oczywiście według firmowego wzorca). Mamy więc pytanie do każdego, kto potrafi na nie kompetentnie odpowiedzieć: jakie oceny zdobyliby czterej uczniowie, gdyby przedstawili podane wyżej rozwiązania? Szczególnie cenilibyśmy wypowiedzi trenerów przyszłych egzaminatorów.

W chwili, gdy ten tekst zostanie wydrukowany, będą już pierwsze wrażenia pomaturalne po egzaminie częściowo w nowym stylu. Oby były to dobre wrażenia.

27 lutego 2001 roku *Marek KORDOS i Piotr MANKIEWICZ*

Rozwiązanie zadania F 556.

Na stół działają ze strony sznura w kierunku poziomym dwie jednakowe, ale przeciwnie skierowane siły (działające na górny i dolny krążek zamocowane na stole) oraz siła tarcia T skierowana w prawo. Z równania

$$F - F + T = \frac{Q_1}{g}a_1$$

otrzymujemy przyspieszenie, z jakim porusza się stół. Przyspieszenie, z którym porusza się ciało, wyznaczamy z równania

$$F - T = \frac{Q_2}{g}a_2.$$

Jeśli siła F jest na tyle mała, że ciało nie ślizga się po stole (tzn. stół i ciało poruszają się z jednakowym przyspieszeniem), mamy

$$F = T\frac{Q_1+Q_2}{Q_1}.$$

Ślizganie się ciężaru po stole rozpoczyna się przy maksymalnej wartości siły tarcia kQ_2, tj. przy wartości przyłożonej do sznura siły

$$F_{\text{kryt}} = kQ_2\frac{Q_1+Q_2}{Q_1} = 100 \text{ N}.$$

Przy danej w warunkach zadania wartości siły 80 N nie ma ślizgania się ciała po stole, a więc stół i ciało poruszają się z jednakowymi przyspieszeniami

$$a = \frac{F}{Q_1+Q_2}g \approx 3{,}14 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$