Klub 44

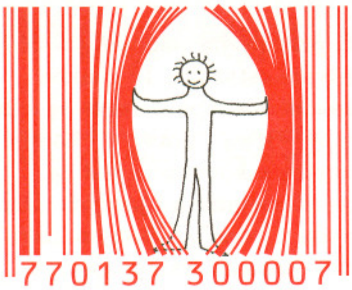
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

$\otimes\sqrt{\text{∮}!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.



Zadania z matematyki nr 425, 426

Redaguje Marcin E. KUCZMA

425. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ o nierównoległych bokach AB i CD znajduje się punkt X taki, że $|\angle ADX| = |\angle BCX| < 90^\circ$ oraz $|\angle DAX| = |\angle CBX| < 90^\circ$. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie Y. Dowieść, że $|\angle AYB| = 2\cdot|\angle ADX|$.

426. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $(b+c)(a+b+c) = c$ oraz $b+c<0$. Dowieść, że wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn są równe.

Zadanie **426** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 413 (WT=2,40) i 414 (WT=1,05) z numeru 1/2001

Piotr Kumor	– Olsztyn	46,53
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	44,88
Paweł Kubit	– Kraków	43,24
Witold Bednorz	– Tychy	40,50
Janusz Olszewski	– Suwałki	39,40

Parada Weteranów! Piotr Kumor zalicza czterdziestkę czwórkę już po raz szósty, a Przemek Gadziński – po raz siódmy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2001

Przypominamy treść zadań:

421. Niech A będzie zbiorem n-elementowym $(n>3)$. Ile jest funkcji $f\colon A\to A$ o tej własności, że $(n-2)$-krotna iterata $f^{n-2} = \underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-2}$ jest odwzorowaniem stałym, podczas gdy f^{n-3} nie jest odwzorowaniem stałym?

422. Rozważamy ciąg liczb $a_n = \prod\limits_{k=1}^{2^n-1} \sin 2^{-n}k\pi$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{2^{-n}}$.

421. Niech f będzie jedną z rozważanych funkcji. Istnieje więc element $c\in A$ taki, że

(1) $\qquad f^{n-2}(x) = c \quad$ dla wszystkich $\quad x\in A.$

Podstawiając kolejno $x=f(c)$ oraz $x=c$ łatwo stwierdzamy, że $f(c)=c$. Skoro f^{n-3} nie jest odwzorowaniem stałym, istnieje element $b\in A$, dla którego $f^{n-3}(b)\neq c$. Oznaczmy $b=a_2$, $f(b)=a_3$, $f^2(b)=a_4$, itd. Działanie funkcji f można przedstawić w postaci grafu skierowanego, zawierającego łańcuch

(2) $\qquad a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_{n-1} \to a_n\circlearrowleft$

$(a_2=b,\ a_n=c)$, w którym wszystkie elementy a_i są różne. Pozostaje w zbiorze A jeszcze jeden element, który nazwiemy a_1. Z warunku (1) wynika, że $f(a_1)\neq a_1$ oraz $f(a_1)\neq a_2$. Pełny graf działania f uzyskamy dorysowując do łańcucha (2) strzałkę od dołączonego elementu a_1 do któregoś z elementów $a_3,\ldots,a_n$.

Policzymy, ile jest sposobów skonfigurowania zbioru A, aby powstał taki graf. Wybieramy element a_1 (n możliwości), po czym ustawiamy pozostałe elementy w ciąg typu (2) ($(n-1)!$ możliwości); następnie prowadzimy strzałkę od a_1 do jednego z punktów $a_3,\ldots,a_n$, rozróżniając dwie sytuacje: albo $a_1\to a_3$, albo $a_1\to a_j$, $4\le j\le n$ ($n-3$ możliwości realizacji tej drugiej sytuacji).

Jeśli $a_1\to a_3$, to graf nie zmieni się po zamianie miejscami elementów a_1 i a_2, co oznacza, że odpowiadające takiej sytuacji funkcje f policzyliśmy dwukrotnie. W każdym z pozostałych $n-3$ przypadków rola elementu a_1 jest wyróżniona i wszystkie konfiguracje różnią się istotnie. Zatem liczba rozważanych funkcji f wynosi $n\cdot(n-1)!\cdot(\frac12+(n-3))$, czyli $(n-\frac52)n!$.

422. Przekształcamy wyrażenie określające n-ty wyraz rozważanego ciągu, stosując w pewnym miejscu podstawienie $j=2^n+k$:

$$a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1}\sin\frac{k\pi}{2^n} = \prod_{k=1}^{2^n-1} 2\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= 2^{2^n-1}\cdot\prod_{k=1}^{2^n-1}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\cdot\prod_{j=2^n+1}^{2^{n+1}-1}\cos\Bigl(\frac{j\pi}{2^{n+1}}-\frac{\pi}{2}\Bigr) =$$

$$= 2^{2^n-1}\cdot\prod_{k=1}^{2^n-1}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\cdot\prod_{j=2^n+1}^{2^{n+1}-1}\sin\frac{j\pi}{2^{n+1}} = 2^{2^n-1}a_{n+1}.$$

Przyjmując $b_n = 2^{2^n-n}a_n$ otrzymujemy zależność $b_{n+1}=b_n$. Ciąg (b_n) jest więc stały, wszystkie jego wyrazy są równe b_1, czyli 2, i ostatecznie

$$a_n^{2^{-n}} = \bigl(2^{n-2^n}b_n\bigr)^{2^{-n}} = 2^{(1+n)2^{-n}-1} \longrightarrow \tfrac12 \qquad \text{przy } n\to\infty.$$

Zadania z fizyki nr 322, 323

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2001

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 314 (WT=2,92) i 315 (WT=1,84) z numeru 3/2001

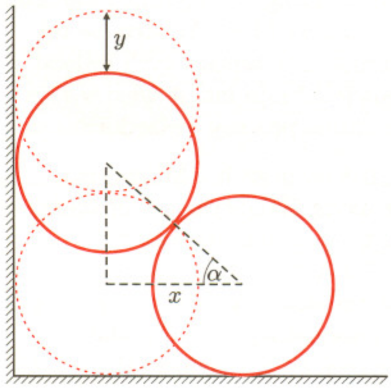
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	39,79
Aleksander Surma	– Myszków	37,60
Tomasz Rudny	– Warszawa	28,28
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	24,86
Tomasz Wietecha	– Tarnów	23,95

322. Na obracającej się ze stałą prędkością kątową ω_0 poziomej ośce osadzono ciało (wahadło), które może się wokół niej obracać, przy czym moment sił tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości poślizgu i jest równy maksymalnemu momentowi tarcia statycznego. Moment ten ma wartość $M_t = 1$ N·m, moment bezwładności wahadła względem osi obrotu $I = 1$ kg·m^2, a maksymalny moment siły ciężkości (równy iloczynowi ciężaru wahadła przez odległość jego środka masy od osi obrotu) $M_g = 1{,}5$ N·m. W chwili początkowej nadano wahadłu dużą prędkość kątową zgodną ze zwrotem ω_0. Dla jakich wartości ω_0 wahadło po długim czasie będzie się obracać, a dla jakich – wykonywać drgania wokół pewnego położenia równowagi?

Poza konkursem: Jaka jest odpowiedź dla przypadku, kiedy $M_g = 2$ N·m, a pozostałe dane są niezmienione?

323. Żarówka o mocy nominalnej 15 W jest dostosowana do napięcia 10 V. Ile ogniw o SEM równej 1,5 V i oporze wewnętrznym 2 Ω trzeba wziąć i jak je połączyć, aby napięcie na żarówce było co najmniej równe nominalnemu?

(Zadanie ma charakter konkursu na minimalną liczbę potrzebnych ogniw; ścisły dowód, że mniejsza liczba ogniw nie wystarczy, nie jest wymagany.)



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2001

Przypominamy treść zadań:

318. Dwa jednakowe walce położono jeden na drugim przy pionowej ścianie (rysunek) i bardzo lekko pchnięto dolny walec w prawo, tak że zaczął się wysuwać spod górnego, który pozostawał w kontakcie ze ścianą. Jaką prędkość osiągnie ostatecznie dolny walec? Zakładamy, że na żadnej ze stykających się powierzchni nie występuje tarcie.

319. Ciepło parowania rtęci wynosi $r = 2{,}9 \cdot 10^5$ J/kg, napięcie powierzchniowe rtęci – $\sigma = 0{,}49$ J/m^2, gęstość – $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ kg/m^3, a masa atomowa – $M = 201$. Na podstawie tych danych wyprowadzić przybliżoną wartość liczby Avogadra.

Wskazówka: napięciem powierzchniowym cieczy nazywamy energię, którą trzeba dostarczyć, aby zwiększyć powierzchnię cieczy o jednostkę. Dla ścisłości należałoby ustalić ośrodek, z jakim styka się rtęć – przyjmijmy, że jego cząsteczki słabo oddziałują z cząsteczkami rtęci (np. jest to powietrze).

318. Oznaczmy promień walców jako r, przesunięcie dolnego walca wzdłuż osi poziomej – jako x, a przesunięcie górnego wzdłuż osi pionowej – jako y. Dopóki walce się stykają, ich środki pozostają odległe o $2r$, zatem przesunięcia spełniają związek

$$(2r - y)^2 + x^2 = 4r^2.$$

Inną miarą przesunięcia walców jest kąt α (rys.), $\cos\alpha = x/2r$. Różniczkując powyższe równanie (lub analizując prędkości geometrycznie) otrzymujemy wzór

$$v_x \cos\alpha = v_y \sin\alpha,$$

gdzie $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Dalej skorzystamy z zasady zachowania energii, przy czym ze względu na brak tarcia ruch walców będzie czysto postępowy, czyli należy pominąć energię kinetyczną ruchu obrotowego. Wynika stąd związek

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gy,$$

który po podstawieniu zależności między v_x a v_y sprowadza się do

$$v_x^2 = 2gy\sin^2\alpha.$$

Dolny walec osiągnie maksymalną prędkość w momencie, w którym $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 0$ (wtedy walce oderwą się od siebie). Przyrównując do zera pochodną $\mathrm{d}(v_x^2)/\mathrm{d}t$ dochodzimy do wniosku, że nastąpi to dla kąta α spełniającego warunek $\sin\alpha = y/r$, a ponieważ $\sin\alpha = (2r - y)/2r$, zatem $y = 2r/3$, $\sin\alpha = 2/3$. Po podstawieniu do bilansu energii wyznaczamy szukaną maksymalną wartość v_x

$$v_{x\,\max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

319. Napięcie powierzchniowe jest energią, którą trzeba dostarczyć cząsteczkom, aby je przeprowadzić z głębi cieczy na powierzchnię. Zakładamy przy tym, że cząsteczki oddziałują tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami, czyli powyższa zmiana energii dotyczy tylko jednocząsteczkowej warstwy powierzchniowej. Rozsądnie jest przyjąć, że całkowite oderwanie cząsteczki od pozostałych (przejście w parę) wymaga dwa razy większej energii, tzn. 2σ na jednostkę powierzchni takiej warstwy. Z drugiej strony, iloczyn ciepła parowania r przez gęstość ρ jest energią niezbędną do odparowania jednostki objętości cieczy. Dzieląc te dwie wielkości otrzymamy zatem grubość u warstwy jednocząsteczkowej

$$u = \frac{2\sigma}{r\rho}.$$

Objętość zajmowana przez jedną cząsteczkę wynosi w przybliżeniu u^3, a ponieważ objętość 1 mola jest równa M/ρ (gdzie M należy wyrazić w kilogramach), więc otrzymujemy liczbę Avogadra daną wzorem

$$N = \frac{M}{\rho}\left(\frac{r\rho}{2\sigma}\right)^3 = M\rho^2\left(\frac{r}{2\sigma}\right)^3.$$

Podstawienie wartości liczbowych daje wynik $N = 9{,}6 \cdot 10^{23}$. Jest rzeczą godną uwagi, że tak proste rachunki dają dobry rząd wielkości liczby Avogadra, choć dokładne jej obliczenie wymagało – jak wiadomo z historii fizyki – trudnych pomiarów. Odnotujmy przy okazji, że dla wody analogiczny rachunek byłby obarczony znacznie większym błędem, co przypuszczalnie ma związek z dipolowym charakterem jej cząsteczek.